'99 추계학술발표회 논문집
한국원자력학회

# 일점로 동특성 모델에 대한 Adjoint Sensitivity Method의 적용

# Application of Adjoint Sensitivity Method to Point Kinetics Model

이병일*[1)]
Siemens
Bunsen str.43 Erlangen Germany 91058

김명현
경희대학교
경기도 용인군 기흥읍 서천리 1번지

## 요 약

Point Kinetics Model에 Adjoint Sensitivity Method를 열수력 궤환이 없는 경우에
였다. Point Kinetics모델에 포함된 모든 시스템 변수가 분석자가 정의한 시스템 응답에
치는 정도를 해석적인 방법으로 표현하였다. 이들 민감도 계수를 해석적으로 표현하기 위
해 Adjoint Sensitivity Method를 사용하였다. 이 방법은 Base-case결과와 Point K
을 G-differential하여 종속변수와 시스템 변수의 변위에 대해 선형화된 별개의 방정식 셀
Adjoint Function과 시스템 변수의 변위분포의 함수로 민감도 계수를 정의하는 것이다.
적으로 각 시스템 변수에 대한 반복계산 없이 Adjoint Function이 가중된 단순한 대수계
통해 각 변수가 시스템응답에 미치는 정도(민감도 계수)를 계산할 수 있다. 이 방법의 장점
은 시스템변수가 많은 모델에 효과적일 뿐 아니라 분석자가 정의한 시스템 응답이 종속변수
그 자체인경우 뿐 아니라 비선형으로 정의되는 Functional 응답에도 적용될 수 있다.

## Abstract

An adjoint sensitivity method was applied to the well known point kin
thermal hydraulic feedback effect. All sensitivity parameters for system r
an analyzer, corresponding to the every system parameters used in point k
analytically derived using an adjoint sensitivity method. Each sensitivit
functioned with base case transients, adjoint function, and error distr
parameters, where the adjoint functions were calculated by solving the
linear equation set obtained from the applying G-differential to the po
Therefore, every sensitivity parameters can be evaluated by a simple al

---

1) 현소속기관 : 경희대학교

without repetition as many as the number of system parameters. This applied not only for the system including many system parameters but a response defined in type of non-linear functional response.

## 1. 서 론

지난 수십년동안 복잡한 물리 현상을 수학적 모델, 특히 수치해석적 모델링을 통해 해석하는 방법이 크게 발달하였다. 컴퓨터의 속도와 용량, 기능이 증대되면서 컴퓨터 응용코드 시스템들이 광범위하게 개발되었는데, 프로그램이 계산한 결과가 실제 값이나 실험 값과 오차를 갖는 것을 피할 수 없었다. 이 오차들은 수학적 모델 자체에 부정확성과 실험에 의해 얻은 계산 변수 값의 불확실성 때문에 발생한다. 따라서 시스템 변수들이 오차를 포함하고 있는 경우, 시스템 변수 오차분포가 시스템 응답 즉 계산 응답 결과에 미치는 민감도(sensitivity)에 관해 관심을 갖게 되었다. 만약 코드 시스템에서 사용하는 시스템 변 변화로 인한 시스템 응답에 대한 민감도 계수를 계산할 수 있다면, 신뢰도 레벨의 정의, 설계 변수에 대한 불확실도, 각 입력변수 변화에 대한 시스템 응답의 영향도 등을 쉽게 판별할 수 있다.

화학반응 동특성, 계 이론, 원자로 물리 및 방사선 차폐 영역에서 좀더 체계적인 민감도 분석방법론으로 개발된 것이 통계적(statistical) 방법보다는 결정론적(deterministic) 방 접방법론(direct method)과 Green's function method이다. 이 방법은 관심이 되는 함한 방정식들을 미분하여 새로운 방정식을 만들고 관심이 되는 모델인자의 도함수를 구하는 것이다. 결과적으로 각 변수에 대한 각각의 방정식 집합이 필요하다. 많은 수의 변수와 상대적으로 적은 수의 시스템 응답을 다루는 모델(노심 열수력 또는 차폐 문제 등이 여기에 해당)에 대하여 좀더 개발된 방법이 adjoint function을 효과적으로 이용한 결정론적 방 다. Adjoint Sensitivity Method(ASM)[1],[2]는 위에서 구한 연립 미분방정식과 sys 의 민감도 정의로부터 유도된 adjoint system의 해인 adjoint function을 base-case 와 시스템 변수 변위분포에 가중한 형태로 민감도 계수를 표현하는 것이다. base-case 대해 선형형태의 adjoint system의 해인 adjoint function을 단 한 번 구하고, 각 시 변위분포에 가중하고 phase spase에 대해 적분함으로서 각 변수에 대한 민감도 계수를 석적으로 구할 수 있다. 이때 시스템 응답이 바뀌더라도 adjoint system의 source 형태 하게 되고 base-case 계산결과도 그대로 사용할 수 있다.

## 1-1. 국내, 외 관련기술의 현황

Adjoint function을 이용한 민감도 분석은 1940년대부터 시작되었으며 원자로 이론 분는 Wigner가 Perturbation 이론에 처음 적용하였고 Variational Method는 Levine, Roussopolos에 의해 적용되었다. 또 Stacey 와 Greenspan은 여러 가지 선형문제의 분석에 adjoint function의 적용 잠재성을 증명하였다. 이런 노력들은 비선형 문제까지 는데 까지 확대되었다. 이런 모든 방법들은 입력변수의 변화에 대한 시스템 응답의 민감도를 구하는 것이 목적이다. 여기서 시스템 응답은 실수공간에서 정의되는 functional(혹 operator)이며, 그 종류 (예를 들어 핵연료의 평균온도, 최고온도, 최고온도 발생위치, 최고온도 발생시간 등)는 분석자에 의해 결정될 수 있다. 이런 과정에서 가장 중요한 것은

adjoint function이 정의될 수 있는 조건을 판단하는 것이다.

1980년대에 Cacuci는 좀더 수학적인 배경에서 민감도 분석이론을 확립하고 적용범위를 대하기 위해 비선형 functional analysis 개념을 도입했다. 이 과정에서 가장 기본적인 조건은 문제의 operator와 functional형태의 시스템 응답이 Frechet derivative[3]를 만다는 것이다. 이 조건이 만족되는 비선형 operator문제와 비선형 functional 응답에 adjoint sensitivity analysis는 이론적으로 가능하게 된다. 80년대 초에 Cacuc functional 및 operator형태의 시스템 응답과 비선형 시스템 모델에 대한 Adjoint S Method 이론이 확립된 후 꾸준히 연구되어지고 있다.

## 1-2. Adjoint Sensitivity Method의 응용 범위

원자력시스템의 최종설계(매 핵연료주기별 장전노심설계 포함)는 안전해석 분석보고서에서 안전성이 확인되어야 한다. 그런데 원자로 설계특성, 분석 특성 그리고 운전 특성 등에 따라 안전해석 방법론은 달라질 수 있다. 그러나 기본개념은 운전상 예상되는 사고 및 가상사고가 발생하더라도 미리 규정된 안전 한계가 위배되지 않도록 소프트웨어 및 하드웨어가 설계되고 운전되어야 한다는 것이다. 안전해석에서는 각각의 시스템 변수와 초기 조건 등은 사고가 보다 심각한 방향으로 진행되도록 허용된 범위내에서 보수적으로 가정되어 진다. 이 기본방법은 LOCA 및 Non-LOCA 모두에 공히 적용되는데, 최근의 추세는 LOC 경우 최적분석(Best Estimation) 방법론에서, Non-LOCA의 경우 열적 여유도 및 주요 수에 대한 포괄적인 분석(안전변수의 최고/최저점과 그들의 발생위치와 발생시간)이 요구되고 있다. 이 과정에서 불확실도의 정량화는 필수적이다.

지금까지의 방법론에서는 불확실 허용 변위가 포함된 입력변수가 안전해석에서 사용되었기 때문에 추가적인 작업은 수행되지 않았다. 또 Non-LOCA 사고분석에서 구한 최대 열 여유도 감소는 입력변수의 다른 어떤 조합으로 구한 열적 여유도 감소 보다 같거나 크게된다. 이때 초기조건 및 입력변수의 임의의 조합으로부터 시작된 사고의 열적 여유도 감소를 운전중 구할 수 있다면 최대 열적 여유도 감소와 현재의 임의의 조건에서 요구되는 열적여유도 감소의 차이만큼 열적 여유도 증가를 얻을 수 있다. 그러나 실제로 운전중 열적 여유도 감소를 구한다는 것은 거의 불가능하다. 왜냐하면 열적 여유도 감소란 사고가 진행되고 보호계통의 작용으로 노심손상없이 그 사고를 완화할 때까지 최대출력증가를 의미하고 그 값을 구하기 위해서는 운전중 실시간 사고해석이 요구되기 때문이다. 그러나 입력변수의 변화로 인한 시스템 응답에 대한 민감도를 체계적이고 수학적으로 구할 수 있다면 이 문제의 접근은 좀더 쉬워질 수 있다.

본 연구에서는 시스템변수에 불연속이 존재하고 강한 stiffness거동을 나타내는 Point kin Model에 Adjoint Sensitivity Method를 적용하고자 한다. 그 첫 번째 단계로서 Poi Model을 사용할 경우 관심이 되는 시스템 응답을 수학적으로 정의하고 Adjoint system 도하고 민감도 계수를 정의하였다.

# 2. Point Kinetics Model 과 시스템 응답 정의

가장 일반적인 Point Kinetics Model에서 열수력적 궤환이 제거된 수학적 모델은 식 (1)과 (2)에서처럼 단순한 연립선형 상미분방정식이 된다

$$\frac{dn}{dt} - \frac{\rho-\beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1} \lambda_i \beta_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d c_i}{dt} - \frac{\beta_i}{\Lambda} n + \lambda_i c_i = 0 \;, \quad i = 1, \ldots, 6 \quad (2)$$

$t=0$ 에서 초기 조건 $n(0) = n^0$ 과 $c_i(0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} n^0$ 을 만족한다. 이 모델은 시간종속 모델이므로 공간에 대한 경계조건은 필요 없다. point kinetics model과 초기조건을 자 형태로 써보면,

$$N\,[U(t), \alpha] = 0 \;, \quad (3)$$

$$B\,(U, \alpha) = U_0(\alpha), \quad (4)$$

여기서 $U(t)$ : 시간종속 변수, $U_0(\alpha)$ : 초기값

system 응답은 분석목적에 따라 정의되는데, 일반적으로는 target종속변수를 포함한 임의 형태의 non-linear form으로 식(5)와 같이 정의될 수 있다.

$$R(e) = \int_\Omega F(\Omega, U, \alpha) d\Omega \;, \quad (5)$$

$e = (U, \alpha)$ : 임의의 phase space에서의 상태벡터와 시스템변수

$F$ : target 종속벡터 값에 임의함수가 가중된 비선형 functional 형태

$R(e)$ : F로 정의된 system response

point kinetics model을 사용하는 경우 주요 응답은 과도현상중 발생하는 최대출력으로 과 같이 system response를 정의하자.

$$R(e) = \int_t n(t) \delta[t - t_*(\alpha_0)] dt \quad (6)$$

$n(t)$ : 시간종속 중성자 출력

$t_*(\alpha_0)$ :Base-case 결과로 결정되는 $\frac{dn}{dt} = 0$ 이 되는 시간

여기서 주목할 것은 시스템 변수가 변하면 최대값 뿐 아니라 최대값 발생시간도 함께 변한다는 사실이다. 이 논문의 목적은 시스템 변수 벡타 $\alpha$ 의 변화에 따라 식(6)에서 정의된 시스템 응답 $R(e)$에 대한 민감도를 계산하는 것이다. 따라서 식(6)은 $R(e)$에 대한 민감도를 정의하는 형태로 바꾸어져야 한다. 민감도를 정의하는 가장 일반적인 G-differential[3],[4]을 적용해보자.

$$D R_*(e^0; h) = \frac{d}{d\varepsilon} [\, R_*(e^0 + \varepsilon h_*)]_{\varepsilon=0} \quad (7)$$

$$= \int_t \frac{d}{d\varepsilon} \{ ( n^0 + \varepsilon h_\kappa ) \delta[ t - t_\kappa( \alpha^0 + \varepsilon h_\alpha ) \} _{\varepsilon=0} dt$$

$$= \int_t h_\kappa \delta[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt - \sum_{i=1,I} ( \frac{\partial t_\kappa}{\partial \alpha_i} )_{\alpha^0} h_{\alpha_i} \int_t n^0 \delta'[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt$$

식(7)의 두 번째 항은 식(8)에서처럼 정의되는 $\delta$ 함수의 미분[5]을 적용하면,

$$\int f(x) \delta'(x - x_0) dx = \int f'(x) \delta(x - x_0) dx \tag{8}$$

다음과 같이 제거되고,

$$\int_t n^0 \delta'[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt = \int_t \frac{d n^0}{dt} \delta[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt = 0 \tag{9}$$

식(7)에서의 민감도 $DR_\kappa$은 간단히 다음과 같이 정의된다.

$$DR_\kappa( e^0 ; h ) = \int_t h_\kappa \delta[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt = \langle h_\kappa , \delta( t - t_0 ) \rangle_t \tag{10}$$

여기서 기호 $\langle x, y \rangle$는 phase space에 대한 적분을 의미하고 $\delta(t - t_0)$는 $S^+_\kappa$ 로 표기했다 임계점 $t_\kappa( \alpha_0 )$에 대한 함축적인 의미의 민감도 $Dt_\kappa(\alpha)$는 다음과 같이 정의된다.

$$Dt_\kappa( \alpha_0 ) = \frac{d}{d\varepsilon} [ t_\kappa( \alpha + \varepsilon h_\alpha ) ]_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1,I} ( \frac{\partial t_\kappa}{\partial \alpha_i} )_{\alpha^0} h_{\alpha_i} \tag{11}$$

명백한 형태의 $Dt_\kappa( \alpha_0 )$은 식(9)에 G-differential을 적용하여 구하게된다.

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_t \frac{d( n^0 + \varepsilon h_\kappa )}{dt} \delta[ t - t_\kappa( \alpha^0 + \varepsilon h_\alpha ) ] dt \right]_{\varepsilon=0} \tag{12}$$

$$= \int_t \frac{d}{dt} h_\kappa \delta[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt - \sum_{i=1,I} ( \frac{\partial t_\kappa}{\partial \alpha_i} )_{\alpha^0} h_{\alpha_i} \int_t \frac{d}{dt} n^0 \delta'[ t - t_\kappa( \alpha^0 ) ] dt = 0$$

식(12)를 식(11)에서 정의된 $Dt_\kappa(\alpha)$에 대해 정리하고 $\delta$ 함수의 미분 정의를 적용하면 (13)을 얻게된다.

$$Dt_\kappa( \alpha_0 ) = \sum_{i=1,I} ( \frac{\partial t_\kappa}{\partial \alpha_i} )_{\alpha^0} h_{\alpha_i} \tag{13}$$

$$= \frac{\int_t h_n \delta'[t - t_n(\alpha^0)]dt}{(\frac{d^2}{dt^2} n^0)_{t_s(\alpha 0)}} = \langle h_n, \delta'(t - t_0) \rangle_t / (d^2 n / dt^2)_{t_s(\alpha^0)}$$

이제 시스템 변수 변화분포 $h_\alpha$에 의한 $h_u$의 분포를 구하고 식(10)과 (13)에 각각 대입하 $DR_n$와 $DR_t$를 구할 수 있다. 시간에 따른 $h_\alpha$와 $h_u$의 관계는 point kinetics 모델 식과 식(2)를 G-differential하여 다음과 같이 source term을 $h_\alpha$로 하고 종속변수를 $h_u$ 하는 $h(= h_u \times h_\alpha)$에 대해 선형인 forward system을 필요로 한다.

## 3. Forward Sensitivity Method

G-differential 을 point kinetics모델에 적용하면 식(14) 와 (15)를 얻는다.

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{d}{dt}(n^0 + \varepsilon h_n) - \frac{(\rho^0 + \varepsilon h_\rho) - (\beta^0 + \varepsilon h_\beta)}{\Lambda^0 + \varepsilon h_\Lambda}(n^0 + \varepsilon h_n) + \sum_{i=1,6}(\lambda_i^0 + \varepsilon h_{\lambda i})(\beta_i^0 + \varepsilon h_{\beta i})\right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\frac{d}{dt}(c_i^0 + \varepsilon h_{ci}) - \frac{\beta_i^0 + \varepsilon h_{\beta i}}{\Lambda^0 + \varepsilon h_\Lambda}(n^0 + \varepsilon h_n) - (\lambda_i^0 + \varepsilon h_{\lambda i})(c_i^0 + \varepsilon h_{ci})\right]_{\varepsilon=0} = 0\ , \quad i = 1, \ldots, 6 \quad (15)$$

여기서 반응도 $\rho$의 함수관계가 명백하게 정의되어야 한다. point kinetics모델에서 반응 $\rho$는 다음과 같이 정의된다. 전체 반응도 $\rho$의 함수 관계는 식(16)에서 정의된다

$$\rho = \rho_{prog}(\alpha)\, 1_-(\tau) + \rho_{scram}(\alpha)\, 1_+(\tau) \quad (16)$$

여기서 $\tau = t - t_0 - \Delta t$

$t_0$ : 원자로 정지신호 발생시간

$\Delta t$ : 정지반응도 삽입 시까지의 지연시간

$\tau \le 0$ 이면 $1_-(\tau) = 1$ , $1_+(\tau) = 0$

$\tau \ge 0$ 이면 $1_-(\tau) = 0$ , $1_+(\tau) = 1$

역시 식(16)에 G-differential을 적용하고

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[(\rho^0 + \varepsilon h_\rho) = (\rho^0 + \varepsilon h_\rho)(t,\ t_0 + \varepsilon h_{t0}, \Delta t + \varepsilon h_{\Delta t})\right]_{\varepsilon=0}$$

$$\Leftrightarrow \quad h_\rho = h_\rho(\tau) + \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\tau}{\partial t_0} h_{t0} + \frac{\partial\tau}{\partial\Delta t} h_{\Delta t}\right] \quad (17)$$

식(15)에 대입하고 정리하면,

$$\frac{d}{dt}h_n - \frac{\rho^0-\beta^0}{\Lambda^0}h_n - \sum_{i=1,6}\lambda_i^0 h_{ci} = \sum_{i=1,6}h_{\lambda i}c_i^0 - \frac{1}{\Lambda^0\Lambda^0}(\rho^0-\beta^0)h_\Lambda n^0$$

$$+\frac{1}{\Lambda^0}\left[(h_\rho - h_\beta)+\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t_0}h_{t_0}+\frac{\partial\tau}{\partial\Delta t}h_{\Delta t}\right)\right]n^0 \qquad (18)$$

$$\frac{d}{dt}h_{ci}+\lambda_i^0 h_{ci}-\frac{\beta_i^0}{\Lambda^0}h_n = \frac{1}{\Lambda^0\Lambda^0}\left[h_{\beta i}\Lambda^0-\beta_i^0 h_\Lambda\right]n^0 - h_{\lambda i}c_i^0, \quad i=1,\ldots,6 \qquad (19)$$

식(18)에서 $\frac{\partial\tau}{\partial t_0}$와 $\frac{\partial\tau}{\partial\Delta t}$는 $\tau$의 정의에 따라 $t_0$와 $\Delta t$에 대해 선형의 관계이므로 더 이상 고려할 필요가 없다. 식(19)에서 시스템 변위벡터 $h_\alpha$ 요소중 유일하게 $h_{t_0}$는 분석자에 의해 결정될 수 없는 변수이다. 왜냐하면 원자로 정지신호 발생시간은 중성자 출력과 정지 설정치에 의해 결정되기 때문이다. 변위 $h_{t_0}$는 $t_0$에 대한 명백한 정의로부터 구할 수 있다. $t=t_0$에서의 $n$는 다음과 같이 $n_0=n(t,\alpha)\mid_{t=t_0}=n(t_0,\alpha)$이 표현되고[6 G-differential을 적용하고 $h_{t_0}$에 대해서 정리하면,

$$h_{n_0}=h_n(t_0)+\frac{\partial n}{\partial t}(t_0)h_{t_0} \qquad (20)$$

$$h_{t_0}=(h_{n_0}-h_n(t_0))/\frac{\partial n}{\partial t}(t_0), \quad \text{여기서 } n_0\text{는 정지 설정치값} \qquad (21)$$

식(21)에서 $h_n(t)$는 $\delta$함수 정의에 따라 다음과 같이 적분형태로 표현될 수 있다.

$$h_n(t_0)=\int_t h_n\delta(t-t_0)dt \qquad (22)$$

식(22)를 식(18)에 대입하면 forward 방정식 (23)과 (24)가 얻어진다.

$$\frac{d}{dt}h_n - \frac{\rho^0-\beta^0}{\Lambda^0}h_n - \sum_{i=1,6}\lambda_i^0 h_{ci} + \frac{\delta(t-t_0)}{\Lambda^0\frac{\partial n}{\partial t_0}\mid_{t=t_0}}\int_t dt\frac{\partial\rho^0}{\partial\tau}n^0 h_n =$$

$$\sum_{i=1,6}h_{\lambda i}c_i^0+\frac{1}{\Lambda^0}\left[(h_\rho-h_\beta)+\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t_0}h_{n_0}+\frac{\partial\tau}{\partial\Delta t}h_{\Delta t}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\Lambda^0\Lambda^0}(\rho^0-\beta^0)h_\Lambda n^0 \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dt}h_{ci}+\lambda_i^0 h_{ci}-\frac{\beta_i^0}{\Lambda^0}h_n = \frac{1}{\Lambda^0\Lambda^0}\left[h_{\beta i}\Lambda^0-\beta_i^0 h_\Lambda\right]n^0 - h_{\lambda i}c_i^0.$$

$i = 1, \ldots, 6$ (24)

식(23),(24)를 연산자 형태로 쓰면 $h$ 에 대해 연립 선형미분방정식이 된다.

$$N_u'(e^0)\,h_u = N_\alpha'(e^0)\,h_\alpha \tag{25}$$

식(25)에서 벡터 $h_u$ 와 $h_\alpha$는 다음과 같다.

$$h_u = [\,h_n, h_{c1}, h_{c2}, h_{c3}, h_{c4}, h_{c5}, h_{c6}]^T \tag{26}$$
$$h_\alpha = [\,h_\rho, h_\beta, h_\Lambda, h_{\Delta t}, h_{n_0}, h_{\beta_1}, \ldots, h_{\beta_6}, h_{\lambda_1}, \ldots, h_{\lambda_6}]^T \tag{27}$$

식(25)와 같이 구한 방정식을 $h_\alpha$를 구성하는 각각의 시스템변수에 대해 계산하고 그 시간종속 해 $h_u$를 식(7)와 (10)에서 정의된 시스템응답에 대입하여 민감도 계수를 구하게 된 이 방법은 forward method라 부른다. forward method는 시스템변수가 적고, 시스수가 많을 경우에는 적합하나, 그 반대의 경우에는 민감도 계수숫자 만큼 반복계산을 필요로 한다. 이런 많은 반복계산을 피하기 위해 고안된 다른 방법이 adjoint sensitivity m이다.

## 4. Adjoint Sensitivity Method

식(25)가 $h$에 대해 linear관계이고, Hilbert space에서 정의될 수 있는 벡터이므로 operator가 존재하고 각각의 연산자의 대응에 의한 상을 phase space에서 내적한 값이 되는 유일한 함수(adjoint function)[7]가 존재하게 된다. 먼저 $h_u$와 차원이 같은 임의의 $V$를 식(25)의 좌변에 가중하고 phase space (여기서는 time domain)에 대해 적분하면

$$\langle V^+ N_u'(e^0)\,h_u \rangle_t =$$
$$\left\langle \left[ n^+ \left\{ \frac{d}{dt} - \frac{\rho^0 - \beta^0}{\Lambda^0} + \frac{\delta(t - t_0)}{\Lambda^0 \frac{\partial n}{\partial t_0}\big|_{t=t_0}} \int_t dt \frac{\partial \rho^0}{\partial \tau}\, n^0 \right\} - \sum_{i=1,6} c_i^+ \frac{\beta_i^0}{\Lambda^0} \right] h_n \right\rangle -$$
$$\left\langle \sum_{i=1,6} \left[ c_i^+ \left\{ \frac{d}{dt} + \lambda_i \right\} - n^+ \lambda_i^0 \right] h_{c_i} \right\rangle =$$
$$\left\langle h_n \left[ \left( -\frac{d}{dt} - \frac{\rho^0 - \beta^0}{\Lambda^0} + \frac{\delta(t - t_0)}{\Lambda^0 \frac{\partial n}{\partial t_0}\big|_{t=t_0}} \int_t dt \frac{\partial \rho^0}{\partial \tau}\, n^0 \right) n^+ - \sum_{i=1,6} \frac{\beta_i^0}{\Lambda^0} c_i^+ \right] \right\rangle$$
$$\left\langle h_{c_i} \left\{ \left( -\frac{d}{dt} + \lambda_i \right) V_{ci}^+ - \sum_{i=1,6} \lambda_i\, n^+ \right\} \right\rangle + V_n^+ h_n \Big|_{t=0}^{t=t_f} + V_{ci}^+ h_{ci} \Big|_{t=0}^{t=t_f} \tag{26}$$

식 (26)을 연산자 형태로 쓰면,

$$\langle V, N_u'(e^0)h_u\rangle_t = \langle h_u, L^*(e^0)V\rangle_t + [P(h_u; V)]_{t=0}^{t=t_f} \qquad (27)$$

여기서 $V^* = (n^*, c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*, c_5^*, c_6^*)$ 이고 $[P(h_u; V)]_{t=0}^{t=t_f}$ 는 phase spac 경계에서 경정되는 bilinear 형태이다. Adjoint system을 풀기 위하여 역시 초기조건들이 되어야 한다. 물리적 현상에 근거하여 초기조건이 결정되는 physical system과는 Adjoint system에서는 문제를 쉽게 풀기 위해 수학적으로 미지수를 제거하는 방향으로 초 조건이 결정되어진다. 식(26)의 bilinear form을 살펴보면, $t=0$ 에서 adjoint functi 조건을 $c_i^* = n^* = 0$ 라고 하면 $t=t_f$에서 $h_n$와 $h_{ci}$의 값이 계산되어져야 한다. 그러나, $t=t_f$에서 adjoint function의 값을 $c_i^* = n^* = 0$ 라고 하면 더 이상 $t=t_f$에서 $h_n$와 의 값이 필요치 않다. 그래서 adjoint system의 초기조건은 $t=t_f$ 에서 $c_i^* = n^*$ $(i=1,..,6)$ 가 되고 Adjoint system은 $t=t_f$ 에서부터 계산되어 진다.

식(27)의 좌변의 $N_u'(e^0)h_u$를 식(25)에 의해 $N_\alpha'(e^0)h_\alpha$로 치환하고 $\langle h_u, L^*(e^0)V\rangle_t$ 에 대해 정리하면 완벽하게 식(28)이 구해진다. 여기서 $L^*(e^0)$ 는 $N_u'(e^0)$ 의 Adjoint 연산자 이고 각각의 연산요소가 transpose된 형태이다.

$$\langle h_u, L^*(e^0)V\rangle_t = \langle V, N_\alpha'(e^0)h_\alpha\rangle_t - [P(h_u; V)]_{t=0}^{t=t_f} =$$
$$\Big\langle n^*\Big[\frac{h_\rho - h_\beta}{\Lambda^0}n^0 - \frac{\rho^0 - \beta^0}{\Lambda^0\Lambda^0}n^0 h_\Lambda + \frac{n^0}{\Lambda^0}\frac{\partial\tau}{\partial\Delta t}h_{\Delta t} + \sum_{i=1,6} c_i^0 h_{\lambda_i}$$
$$+ n^0 \Big/ \Big(\Lambda^0\frac{\partial n(t_0)}{\partial t}\Big)\frac{\partial\rho^0}{\partial\tau}h_n\Big]\Big\rangle - V_n^* h_n \Big|_{t=0}^{t=t_f} - V_{ci}^* h_{ci}\Big|_{t=0}^{t=t_f}$$
$$-\Big\langle \sum_{i=1,6} c_i^*\Big(\frac{h_{\beta i}}{\Lambda^0}n^0 h_\Lambda - \frac{\beta_i^0}{\Lambda^0\Lambda^0}n^0 - c_i^0 h_{\lambda_i}\Big)\Big\rangle \qquad (28)$$

식(28)의 좌변은 각각 식(10)과 (13)에서 정의된 민감도 계수 $DR_n$와 $DR_t$와 같은 p space에서 정의된 내적이므로 등가 원리[7]에 의해 각각 식(10)과 (13)으로 치환될 수 있

## 5. Adjoint System

식(28)을 연산자 형태로 쓰면,

$$\langle h_u, L^*(e^0)V\rangle_t = \langle V, N_\alpha'(e^0)h_\alpha\rangle_t - [P(h_u; V)]_{t=0}^{t=t_f} \qquad (29)$$

식(29)에서 Adjoint function $V^*$는 고유한 값이고, Riesz정리[1][7]에 의해 식(5)과 (29)으로 부터 다음과 같은 Adjoint system을 얻을 수 있다.

$$L^*(e^0)V^* = \langle h_n, \delta(t-t_0)\rangle_t = S^*_n \tag{30}$$

$$L^*(e^0)V^* = \langle h_n, \delta'(t-t_0)\rangle_t / (d^2n/dt^2)_{t_s(\alpha^0)} = S^*_c \tag{31}$$

식(29)을 미분방정식 형태로 써보면,

$$-\frac{d}{dt}n^* - \frac{\rho^0-\beta^0}{\Lambda^0}n^* + \delta(t-t_0)\int_{t_0+\Delta t}^{t_f} dt\frac{\partial\rho^0}{\partial\tau}n^0 n^* - \sum_{i=1,6}\frac{\beta_i^0}{\Lambda^0}c_i^* = S^*_n \tag{32}$$

$$-\frac{d}{dt}c_i^* - (n^* - c_i^*)\lambda_i = S^*_{ci},\ i=1,\ldots,6 \tag{33}$$

Adjoint system 식(32) 와 (33)으로부터 구한 시간 종속 Adjoint solution은 식(28 민감도 계수를 구하게 된다. 민감도 계수를 의미하는 식(29)를 Adjoint function이 가중 분형태로 써보면 식(34)와 같이 표현된다..

$$
\begin{aligned}
DR_n = {} & \int_t n^*\frac{n^0}{\Lambda^0}h_\rho dt - \int_t n^*\frac{n^0}{\Lambda^0}h_\beta dt - \int_t n^*\frac{\rho-\beta}{\Lambda^0\Lambda^0}h_\Lambda dt \\
& + \int_t \frac{n^0}{\Lambda^0}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\Delta t}h_{\Delta t}dt + \frac{1}{(\partial n/\partial t)_{t_0}}\int_t n^*\frac{n^0}{\Lambda^0}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_0}h_{n_0}dt \\
& + \sum_{i=1,6}\int_t n^* c_i h_{\lambda_i}dt - \sum_{i=1,6}\int_t c_i^*\frac{\beta_i}{\Lambda^0\Lambda^0}n^0 h_\Lambda dt \\
& + \sum_{i=1,6}\int_t c_i^*\frac{n^0}{\Lambda^0}n^0 h_{\beta_i}dt - \sum_{i=1,6}\int_t c_i^* c_i^0 h_{\lambda_i}dt \\
& - n^* h_n \Big|_0^{t_f} - \sum_{i=1,6} c_i^* h_{ci} \Big|_0^{t_f}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

보는 바와 같이 $\alpha$ 의 변위벡터 $h_\alpha$가 결정되면 단순한 대수계산을 통해 각각의 시스템 변 수의 변위에 대한 민감도 $DR_n$을 계산할 수 있다.

## 6. 정 리

Point kinetics model에 대해 Adjoint Sensitivity Method를 적용하여 과도현상중 최 최대값 발생 위치를 시스템 응답으로 정의한 Adjoint system을 유도하였다. 시스템 응 바뀌는 경우는 Adjoint system의 source항만 바뀌게된다. 특히, Adjoint system kinetics model과 같은 형태의 방정식으로 나타나므로 간단한 코드 수정만으로도 Ad function을 계산할 수 있다. 식 (34)에서 처럼 단 한번의 Adjoint function계산 결과를 각각 변수의 변위벡터와 Base-case 계산결과에 가중하여 대수적 적분을 통해 민감도 계수를 구하게 된다. 이렇게 구한 민감도 계수가 갖은 의미는 해석적이라는 것 외에 모든 시스템변수를 다룰 수 있고 반복계산이 필요하지 않으므로 계산속도가 빠르다는 것이다. 특히, Base-case가 바뀌는 경우에 더욱 효과적이다.

## 7. 참고 문헌


[1]. D.G. CACUCI, *J.Math.Physics.*, 22,2794(1981)

[2]. D.G. CACUCI, *J.Math.Physics.*, 22,2803(1981)

[3]. 시스템 변수의 변화로 인한 응답의 민감도의 정의에 사용되는 가장 일반적인 개념이 Gateaux(G) Differential이다. Base-case, $e^0$에서 연산자 $S$ 에 의한 대응의 G-differential, $VS(e^0;h)$의 정의는 다음과 같다.

$$VS(e^0;h) \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\{[S(e^0+\varepsilon h)]\}_{\varepsilon=0}$$

여기서 $\varepsilon$ : 실수, $h=(h_u, h_\alpha)$는 Base-case $e^0=(U^0, \alpha^0)$의 주위로의 변위벡터.

[4] Ruth F. Curtain, Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press,Inc.(1977)

[5]. F.B. Hildelbrand, Advanced Calculus for Applications,2th,Englewood Cliffs,New Jersey

[6]. C.V.PARKS, P.J.MAUDLIN, and C.F. WEBER, Trans.Am.Nucl.Soc., 35,376(1980)

[7]. E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Application, 1978,John Wiley & Sons