2000 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

Adjoint Sensitivity Method를 이용한 일점 동특성 모델의 민감도 계수 계산

An Application of Adjoint Sensitivity Method for the Evaluation of Sensitivity Parameters of a Point Kinetics Model

이병일, 김명현

경희대학교
경기도 용인군 기흥읍 1 번지

요 약

일점 동특성 모델에 Adjoint Sensitivity Method(ASM)를 적용하여 시스템 변수 변화로 인한 시스템 응답의 변화로서 출력 Peak 발생 시간과 Peak 출력 값의 변화량을 예측하였다. ASM에서는 base case와 시스템 변수 변위분포에 adjoint function을 가중하여 시스템 응답 변위를 대수적으로 적분한 형태로 표현한다. Adjoint Function은 일점 동특성 모델을 G-differential하여 얻은 forward equation을 adjoint system으로 변환한 후 구할 수 있다. 본 논문에서는 초기조건 변화에 대한 시스템 응답 변위를 예측하였는데, peak 출력의 변화는 잘 예측하였으나 발생시간 예측은 다소 틀리게 예측함을 확인하였다.

Abstract

Adjoint Sensitivity Method was applied to a Point Kinetics Model to predict the change in system responses of peak power value and its time location due to the change in system parameters. In an ASM, the variation of system response was expressed as a simple algebraic integral form containing a base case, error distribution of system parameters and adjoint function. Adjoint function was obtained from the system adjoint to forward system. In this paper the change in system response caused by perturbed initial condition was calculated. The variation in peak power was calculated in good agreement with the direct simulation result.

1. 서 론

본 논문은 Forward Sensitivity Method(FSM)[1]에 관한 본 학회 논문의 후편으로서 Adjoint Sensitivity Method(ASM)에 관한 내용을 기술하였다. FSM는 main problem (point kinetics model)을 반복해서 풀지 않는다는 것 외에 main problem을 G-differential하여 얻

은 forward system을 시스템 변수의 개수만큼 풀어야 한다는 측면에서는 다를 바 없다. 그러나 시스템 변수의 개수보다 관심이 되는 시스템 응답의 개수가 시스템 변수의 개수보다 많은 경우에는 효과적일 수 있다. 공학문제 특히 원자력공학에서 사용되는 코드 시스템은 그 반대의 경우가 대부분이다. FSM에서 처럼 각 변수에 대해 반복계산을 피할 수 있는 방법으로 제안된 것이 Adjoint Sensitivity Method(ASM)[2,3,4]이다. Adjoint function은 G-differential이 정의되는 Banach space보다 좀더 제한적인 Hilbert space에서만 정의될 수 있다. 그러나 다행스럽게 대부분의 공학문제는 Hilbert space에서 정의된다. ASM를 적용하기 위해 adjoint system을 유도하고 그 system의 해인 adjoint function을 구하고 각 시스템 응답을 정의하여 시스템 변수 교란에 대한 시스템 응답 변화를 구하게 된다.

2. Adjoint System

Adjoint system을 적용하기 위해서는 adjoint function을 구해야 한다. 이 adjoint function은 시스템 응답에 대응하는 adjoint system의 해로써 forward system[1]에 대해 adjoint한 system으로 정의된다.

일반적으로 adjoint system과 function이 정의되는 일반적인 경우는 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} V^{*}, N'_{U} h_{U} d\Omega = \int_{\Omega} h_{U}, L^{*} V^{*} d\Omega \qquad (1)$$

여기서, Ω : phase space

V^{*} : adjoint function

L^{*} : N'_{U} 에 adjoint한 operator

위에서 정의되는 $L^{*} V^{*}$는 adjoint system의 homogeneous 부분이며, 완벽한 adjoint system을 구하기 위해 adjoint system의 driving force(source) 항과 초기조건이 결정되어야 한다.

2-1. Adjoint System의 유도

Point Kinetics Model의 forward system[1]을 연산자 형태로 써 보면 다음과 같이 h 에 대하여 linear 임을 알 수 있다.

$$N'_{U} h_{u} = N'_{\alpha} h_{\alpha} \qquad (2)$$

먼저 식 (2)의 좌변에 h_{U}와 차원이 같은 임의의 벡터셀 V^{*} 를 가중하면 상공간에 대해 적분하면,

$$\langle V^*, N'_U h_U \rangle_t = \left\langle [\ldots V^* ..] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & N'_U & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ h_U \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right\rangle_t =$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} n^*\left[\frac{d}{dt} - \frac{\rho^0 - \beta^0}{\Lambda^0} + \frac{N^0}{\Lambda^0}\xi\right], & -n^*\lambda_1, & -n^*\lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ -c_1^*\frac{\beta_1}{\lambda^0}, & c_1^*\left(\frac{d}{dt} + \lambda_1\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & 0 & 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n \\ h_{c1} \\ h_{c2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right\rangle_t = \quad (3\text{-}1)$$

$$\int_0^{t_f} n^*\left[\frac{d}{dt} - \frac{\rho^0 - \beta^0}{\Lambda^0} + \frac{N^0}{\Lambda^0}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{1}{(dN/dt)_{t_0}}\{\delta(t) + 1(\tau)\}\int_0^{t_f}\delta(t-t_0)dt\right] h_n dt -$$

$$\sum_i \int_0^{t_f} n^*\lambda_i h_{ci} dt - \sum_i \int_0^{t_f} C_i^* \frac{\beta_i}{\Lambda^0} h_n dt + \sum_i \int_0^{t_f} C_i^*\left(\frac{d}{dt} + \lambda_i\right) h_{ci} dt \quad (3\text{-}2)$$

각 항을 적분하면,

$$= n^* h_n \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} h_n, \frac{d}{dt} n^* dt - \int_0^{t_f} h_n, \frac{\rho^0 - \beta^0}{\Lambda^0} n^* dt +$$

$$\int_0^{t_f}\left[\frac{1}{\Lambda^0}\frac{\delta(t-t_0)}{(dN/dt)_{t_0}}\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}\frac{\partial\rho}{\partial\tau} N^0 n^* dt\right] h_n dt - \sum_i \int_0^{t_f} h_{ci}, \lambda_i n^* dt -$$

$$\sum_i \int_0^{t_f} h_n, \frac{\beta_i}{\Lambda^0} C_i^* dt + \sum_i C_i^* h_{ci} \Big|_0^{t_f} - \sum_i \int_0^{t_f} h_{ci}, \frac{d}{dt} C_i^* dt \quad (3\text{-}3)$$

operator 와 matrix 형태로 각각 써보면,

$$= \langle h_U, L^* V^* \rangle_t + p(V^*; N^0, h_\alpha)_{\partial\Omega} \quad (3\text{-}4)$$

$$= \left\langle [\ldots h_U ..] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & L^* & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ V^* \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right\rangle_t + n^* h_n \Big|_0^{t_f} + \sum_i C_i^* h_{ci} \Big|_0^{t_f}$$

$$(3\text{-}5)$$

$$= \Big\langle [h_n, h_{c1}, h_{c2}, h_{c3}, h_{c4}, h_{c5}, h_{c6},] *$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -\frac{d}{dt}-\frac{\rho^0-\beta^0}{\Lambda^0}+\delta(t-t_0)\zeta & -\frac{\beta_1}{\Lambda^0} & -\frac{\beta_2}{\Lambda^0} & . \\ -\lambda_1 & -\frac{d}{dt}+\lambda_1 & 0 & . \\ -\lambda_2 & 0 & -\frac{d}{dt}+\lambda_2 & . \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} n^* \\ c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \\ c_4^* \\ c_5^* \\ c_6^* \end{array}\right] \Bigg\rangle_t \tag{3-6}$$

$$+ \quad n^* h_n \Big|_0^{t_f} + \sum_i C_i^* h_{ci} \Big|_0^{t_f}$$

여기서, ξ : $\frac{\partial\rho}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t_0}\frac{1}{\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_{t_0}}\int_t h_n(t)\delta(t-t_0)dt$

ζ : $\frac{1}{\Lambda^0}\frac{1}{(dN/dt)_{t_0}}\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}N^0 n^* dt$

$\partial\Omega$: 상공간의 경계

지금까지의 과정을 operator 형태로 쓰고 $\langle h_U, L^* V^*\rangle_t$에 대해서 다시 정리해보면 다음과 같다.

$$\langle h_U, L^* V^*\rangle_t = \langle V^*, N'_U h_U\rangle_t - p(V^*; N^0, h_\alpha)_{\partial\Omega} \tag{4}$$

식(4)의 좌변을 상공간에서의 최대출력을 정의한 시스템 응답과 비교하면 Rietz theorem[5]에 의해 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} DR_n &= \langle h_U, \delta[t-t_n(\alpha)]\rangle [1,0,0,0,0,0,0,0]^T \\ &= \langle h_U, L^* V^*\rangle_t \end{aligned} \tag{5}$$

이때 adjoin function, V^*는 다음의 같은 adjoint system 관계를 만족시켜야 한다.

$$L^* V^* = \delta[t-t_n(\alpha)]\,[1,0,0,0,0,0,0,0]^T = S^* \tag{6}$$

식 (6)를 미분방정식 형태로 써보면 다음과 같다.

$$-\frac{d}{dt}n^* - \frac{\rho^0-\beta^0}{\Lambda^0}n^* + \frac{1}{\Lambda^0}\frac{\delta(t-t_0)}{(dN/dt)_{t_0}}\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}N^0 n^* dt$$

$$-\sum_i\frac{\beta_i}{\Lambda^0}C_i^* = \delta[t-t_n(\alpha)] \tag{7-1}$$

$$-\frac{d}{dt}n^* + \lambda_i(C_i^* - n^*) = 0\ , \qquad i=1,..,6 \tag{7-2}$$

2-2. Adjoint system의 초기조건 결정

ASM의 응용에서 가장 중요한 것은 식(7)의 시간종속해인 adjoint function을 구하는 것이다. 초기조건 문제의 system해를 구하기 위해서는 적절한 조건이 부여되어야 한다. Physical system의 초기조건은 물리적 타당성을 바탕으로 결정되어야되지만 수학적 조건에서 유도된 adjoint system에서는 문제가 쉽게 풀리도록 수학적으로 조건을 결정할 수 있다.

식(3-6)의 마지막 두 항은 phase space의 경계에서 정의되는 값이다. 이때 N^*와 C_i^*의 초기조건을 adjoint function이 쉽게 구해지도록 분석자가 결정할 수 있다. 먼저 phase space $t=0$에서 N^*와 C_i^*의 값을 zero로 놓는 경우를 생각할 수 있다. 이때는 $t=t_f$에서 adjoint function, N^*와 C_i^*를 구할 수 있지만 $t=t_f$에서의 h_N와 h_{C_i}의 값이 요구된다. 그러나 $t=t_f$에서의 h_N와 h_{C_i}의 값을 구하기 위해 비용이 많이 든다. 그러나, $t=t_f$에서 adjoint function, N^*와 C_i^*를 zero로 놓으면 $t=0$에서의 h_N와 h_{C_i}의 값이 요구된다. 이때 $t=0$에서의 h_N와 h_{C_i}의 값은 초기조건의 변화량이므로 (일종의 시스템 변수로 다루어짐) 어려움 없이 초기조건 변화에 대한 시스템 반응병화를 예측할 수 있다.

2-3. Adjoint system중 적분항의 이해

식(7-1)에서 보면 다음과 같은 적분항이 존재한다.

$$\frac{\delta(t-t_0)}{(\partial N/\partial t)_{t_0}}\frac{1}{\Lambda^0}\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}\frac{\partial\rho}{\partial\tau}N^0 n^* dt \qquad (8)$$

시스템 변수의 변화로 원자로 정지신호가발생 시간이 $t=t_0$에서 $t=t_0'$으로 변하는 경우 실제 반응도 스위치가 일어나는 시간은 $t=t_0+\Delta t$ 에서 $t=t_0'+\Delta t$ 으로 변하게 된다. 이때 반응도 변화량은 정지신호 발생시간의 변위($\Delta t_0=t_0-t_0'$)에 의해 결정된다. 결국 forward system에서 시스템 변수변화에 의한 반응도 profile이 $t=t_0$에서 적분된 형태로 나타내어진다. 이때 적분구간이 $\int_0^{t_f}\cdots$ 에서 $\int_{t_0+\Delta t}^{t_f}\cdots$ 로 변한 이유는 식(7-1)에서 적분안에 포함된 delta function 과 unit step function이 제거되면서 적분구간을 변경시켰기 때문이다.

3. Adjoint Function

Point Kinetics Model의 G-differential을 통해 유도된 forward system의 adjoint system을 살펴보면 그 형태가 main problem인 point kinetics model과 비교해 보면 2-3절에서 다룬 반응도 스위치 항을 제외하면 그 형태는 크게 다르지 않음을 알 수 있다. 그러므로

adjoint system을 풀기 위해 별도의 solver program은 필요치 않다 다만 main problem solver를 약간 수정하여 사용할 수 있다. 다만 시스템 응답이 변하는 경우 adjoint system의 driving force항을 변화시킴으로서 각각의 시스템 응답에 해당하는 adjoint function을 구할 수 있다.

Adjoint system의 몇몇 모델 변수들은 Base case로부터 계산되어진다. adjoint system에서 요구하는 변수는 t_0, $t_n(\alpha_0)$, $(dN/dt)_{t_0}$등이다. 그림 1은 base case의 과도현상이며 그림 2와 3은 는 2절에서 유도된 adjoint system의 adjoint function이다. 이때 시스템 응답은 peak power 이다. 그림 2는 두 개의 날카로운 peak가 나타나는데 첫 번째 peak는 source 항의 발단이 원인이고 두 번째 peak는 원자로 정지신호의 발생 시점에서 원자로 정지신호 변화로 발생하는 반응도 스위치 효과의 potential 이다. 그림 2에서 두 peak 모두 빠르게 전파되는 반면 그림 3에서는 느리게 전파됨을 알 수 있다. 이 원인은 중성자 발생시간과 선행핵 붕괴시간의 차이 때문이다.

4. 시스템 응답 변위 계산

시스템 응답으로 정의된 DR_n과 식(3)을 비교하면 2-1절에서 정의한 시스템 응답 변위를 식(9)과 같이 치환되며,

$$\begin{aligned}
DR_n &= \langle V^*, N'_U h_U \rangle_t - p\left(V^*; N^0, h_\alpha\right)_{\partial\Omega} \\
&= \langle V^*, N'_\alpha h_\alpha \rangle_t - p\left(V^*; N^0, h_\alpha\right)_{\partial\Omega} \\
&= \int_0^{t_f} n^* \frac{N^0}{\Lambda^0 \Lambda^0}(h_\rho - h_\beta)dt - \int_0^{t_f} n^* \frac{N^0}{\Lambda^0 \Lambda^0}(\rho^0 - \beta^0) h_\Lambda dt + \\
&\frac{1}{\Lambda^0 (dN/dt)_{t_0}} \int_{t_0+\Delta t}^{t_f} n^* N^0 \frac{\partial\rho}{\partial\tau}[h_{n_0} + h_{\Delta t}]dt + \sum_i \int_0^{t_f} n^* h_{\lambda_i} C_i^0 dt + \\
&\sum_i \int_0^{t_f} C_i^* \left[\frac{h_{\beta_i}}{\Lambda^0} N^0 - \frac{\beta_i^0 h_\Lambda}{\Lambda^0 \Lambda^0} N^0 - h_{\lambda_i C_i^0}\right] dt \\
&- n^* h_n \Big|_0^{t_f} - \sum_i C_i^* h_{ci} \Big|_0^{t_f} \qquad (9)
\end{aligned}$$

그 형태는 adjoint function이 base case와 시스템 변수변위에 가중된 형태임을 알 수 있다. 식(9)에 우변의 모든 항은 모두 알고있는 값이며 단순한 대수적 표현임을 알 수 있다. 이제 분석자가 관심있어 하는 시스템 변수 α와 변위 h_α가 결정되면 식 (9)에 대입하여 시스템 응답 변위를 구하게 된다. 시스템 응답 변위를 정의하는 식(9)이 상당히 복잡한 형태로 구성되어 있지만 실제 시스템 변수 변위에 대한 시스템 응답 변위를 계산하는 경우에는 상당히 간단한 형태로 표현된다. 예를 들어 시스템 변수중 하나인 초기 조건 변화에 의한 시스템 응답 변위를 구하는 경우에는 식(9)은 다음과 같이 시스템 변수 초기조건을 제외한 다른 모든 항은 사라지게 되어 상공간 경계에서의 adjoint function과 시스템 변수의 곱으로 표현된다.

$$D R_n = - \; n^* h_n \big|_0^{t_f} - \sum_i C_i^* h_{ci} \big|_0^{t_f} \tag{10}$$

본 논문에서 사용한 과도현상(base case)은 참고논문[1]에서 민감도 분석 대상과 같은 경우이다. 시스템 변수 초기조건의 변위에 대한 시스템 응답변위를 표 1에 나타내었다. 표 1에서 두 번째 열은 base case에서 얻은 최대 출력값과 최대출력 발생 시간이다. 세 번째 열은 시스템 변수 교란을 직접 반복계산을 통해 계산한 값이며 다른 계산 결과에 대해 참값으로 간주된다. 세 번째와 네 번째 열의 값은 각각 ASM과 FSM방법을 통해 예측된 시스템 응답 변위이다. adjoint system의 초기조건을 $time = t_f$에서 zero로 결정함으로써 식(10)은 $time = 0$에서의 값만으로 간단히 계산되어 진다. 그러므로 초기조건의 변화에 대한 민감도 분석이 요구되는 경우 특히 유용함을 알 수 있다. 나머지 다른 시스템 변수에 대한 시스템 응답변화는 식(9)에서 처럼 적분을 통해 구하게 된다. 예를들면 반응도 변화에 대한 시스템 응답을 계산하는 경우에는 반응도 변화를 나타내는 h_ρ항을 제외하고는 모두 제거되어 다음과 같이 단순한 형태로 식(11)로 표현되어 진다.

$$D R_n = \int_0^{t_f} n^* \frac{N^0}{\Lambda^0 \Lambda^0} h_\rho dt \tag{11}$$

peak power 응답에 대한 결과는 adjoint, forward method 모두 직접 반복계산으로 구한 결과와 잘 일치하고 있으나 시간 미분 항으로 정의된 peak power 시간 위치 응답은 크게 예측되었음을 알 수 있다.

5. 결론 및 향후과제

Point Kinetic Model에 Adjoint Method를 적용하여 이 모델에서 사용되는 시스템 변수들에 대해 민감도 계수를 구하였다. 먼저 Point Kinetics Model을 G-differential 하여 Forward System을 구하고 검증하였으며[1], 직접 반복 계산에 의한 결과와 비교한 결과 잘 일치함을 보였다. 그러나 이 방법은 시스템 변수의 개수만큼 Forward System을 반복 계산해야 하는 어려운 점이 있었다. ASM를 사용하는 경우 Forward System에 adjoint한 system을 좀더 제한적인 조건에서 구하고 시스템 변수 변위와 Base Case에 가중하여 단순한 대수적 계산을 통해 민감도 계수를 구하였다. Adjoint function의 모양은 delta function의 영향으로 날카로운 peak가 나타남에도 불구하고 초기조건 변화에 대해 정확한 값을 예측할 수 있음을 확인했다.

지금까지 Adjoint Method적용은 초기조건 변화에 대해서만 수행되었다. 앞으로 다른 시스템 변수에 대해 민감도 계수 계산을 수행하고 그 결과를 제시할 예정이다. 본 연구에서는 Feed back효과가 포함되지 않은 Point Kinetics Model을 다루었으나 다음연구에서는 비선형이 존재하는 1차원 이상의 다차원 동특성 모델에 적용하여 그 활용 범위의 확대를 검증할 필요가 있다.

감사의 글

본 연구는 한국전력공사, 기초전력공학공동연구소 1999년도 자유공모과제의 연구비 지원으로 수행되었음을 밝힙니다.

References

1) 이병일, 김명현, "Forward Sensitivity Method를 이용한 일점 동특성 모델의 민감도 계수 계산", 원자력학회 춘계학술발표회 논문집, 고리연수원, 5월 (2000)
2) D.G.Cacuci, "Sensitivity Theory for Nonlinear System I", J. Math.Phys.,22,2794 (1981)
3) D.G.Cacuci, "Sensitivity Theory for Nonlinear System II", J. Math.Phys.,22,2803 (1981)
4) D.G.Cacuci, P.J.Maudlin and C.V.Parks, "Adjoint Sensitivity Analysis of Extremum-Type Response in Reactor Safety", Nucl. Sci. Eng., 83,112-135 (1983)
5) E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley & Sons, (1978)

표 1. 초기 조건 1%변화에 대한 시스템 응답의 변화 (절대값)

	Transient Result	direct Simulation Case의 변위 값	ASM의 변위 예측값 (%error)	FSM 변위 예측값 (%error)
Peak Power	1.362 (P/P_0)	-0.02831	-0.02954 (4.3%)	-0.02915 (3%)
Peak Power Time Location	0.482 sec	-0.016	-0.019 (19%)	-0.02 (25%)

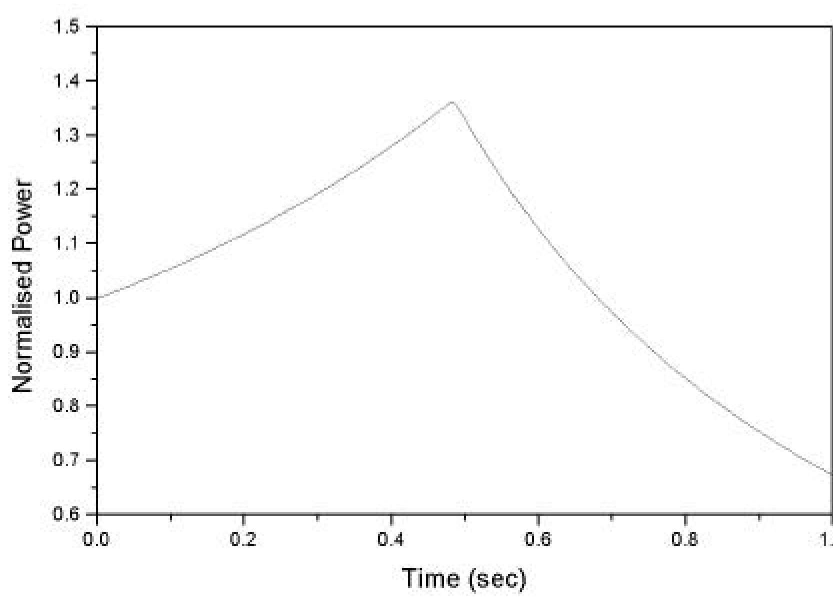

그림 1. Base Case의 출력 변화

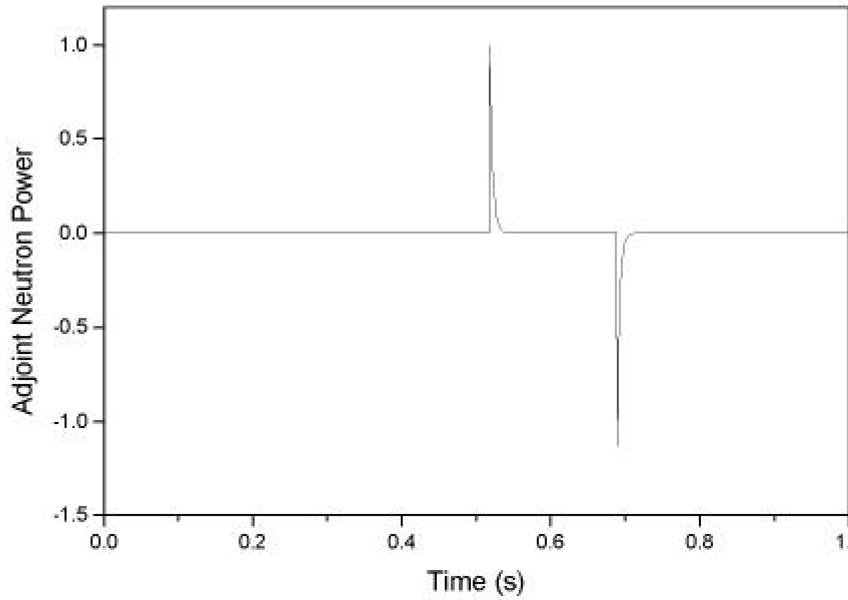

그림 2. Peak Power 응답에 대한 Adjoint function (neutron power)

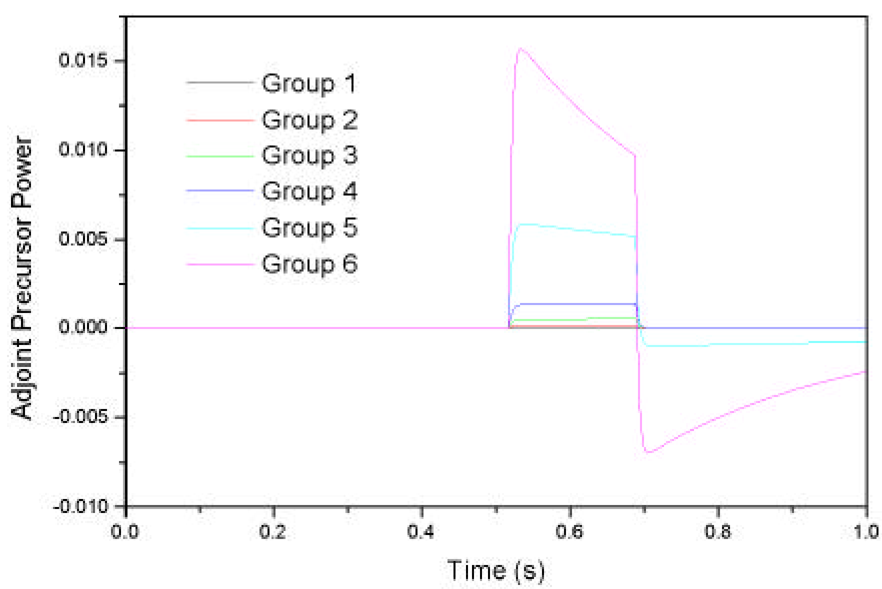

그림 3. Peak Power 응답에 대한 Adjoint function (precursor power)