2000 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

해석함수 전개 노달법을 이용한 단순 우성 중성자 수송해법

Analytic Function Expansion Method for the Simplified Even-Parity Transport Solutions

노태완

홍익대학교
서울 마포구 상수동 72-1

요약

고정 중성자원에 의해 비제차성을 갖는 수송방정식에 대한 해석함수 전개 노달법을 개발하였다. 연구의 목적을 방법론 개발에 두고 2차원 사각형 노드에 대해 5개의 미지수를 갖는 비교적 간단한 격자구조에 대해, 확산방정식과 같은 타원형 편미방으로 나타나는 S_N 단순우성 수송방정식을 택하여 새로운 방법이 잘 적용됨을 보였다.

Abstract

A new analytic function expansion method has been developed for the transport equation which is inhomogeneous due to the existence of a fixed source term in the right hand side. Since the purpose of this study is developing a new methodology, we use a relatively simple mesh configuration which consists of 5 unknowns in a 2 dimensional rectangular element for the solution of the simplified even-parity S_N transport equation. Numerical results are attached.

1. 서론

매질 내에서의 중성자 거동은 위치, 방향, 에너지 및 시간의 함수로 매질의 중성자 반응단면적(cross sections)과 함께 1계 편미분 방정식인 Boltzmann 수송방정식(Boltzmann transport equation)으로 기술된다. 수송방정식은 방향 변수를 포함하고 있어 이에 대한 계산의 비효율성 등으로 인하여 극히 제한된 용도로 사용되어 왔으며 원자로 전 노심(full core) 계산 등에는 이의 근사식으로 방향 변수를 제거한 중성자 확산방정식(neutron diffusion equation)이 사용되어 왔다. 하지만 보다 정밀한 계산을 위하여 근본적으로 오차를 포함하는 확산방정식보다는 수송방정식을 직접 풀고자 하는 노력이 수 년 전부터 대두되고 있는데 이는 전산기 하드웨어 발달로 대용량 계산

이 가능해졌으며 중성자 확산방정식의 해법에 적용되어 큰 성공을 거둔 노달이론(nodal theory)을 수송방정식에 접목하여 그 효율성을 높일 수 있기 때문이다.

본 연구에서는 확산 방정식의 해법으로 그 효용성을 인정받고 있는 해석함수전개 노달법(AFEN: Analytic Function Expansion Nodal method)을 수송방정식에 적용한다. 수송방정식으로는 우성수송방정식의 교차미분항을 제거한 근사식인 단순우성수송방정식(simplified even parity transport equation)을 사용한다. 이 식은 기존의 수송방정식의 단점으로 지목되는 해의 음수성, 광첨두현상(ray effects) 등을 갖지 않으며, 방향차분법을 사용하는 경우 우성수송방정식과 달리 반사경계조건이 1개 방향에 대해서만 주어지고, 확산가속법 적용 시에도 보다 빠른 수렴속도를 보이는 것으로 나타났다. 더욱이 단순우성수송방정식은 확산방정식과 같은 타원형 미분연산자(elliptic differential operator)를 가지므로 방향변수에 대하여 방향차분법을 사용하면, 확산 방정식에 대해 개발된 모든 위치 변수 처리법을 용이하게 적용할 수 있다.

2. 수송방정식(transport equations)

2.1 Boltzmann 수송방정식

1계 Boltzmann 수송방정식(Boltzmann transport equation)의 2차원 형태는

$$\mu\frac{\partial\psi(x,y,\mu,\eta)}{\partial x}+\eta\frac{\partial\psi(x,y,\mu,\eta)}{\partial y}+\sigma(x,y)\psi(x,y)$$
$$=\sigma_s(x,y)\,\phi(x,y)+Q(x,y)\ ,\quad -1\le\mu,\eta\le 1 \qquad (1)$$

이다. 여기서, $\psi(x,y,\mu,\eta)$는 점(x,y)에서 (μ,η) 방향의 방향 중성자속(angular neutron flux)이고, σ와 σ_s는 거시총단면적(macroscopic total cross section) 및 거시산란단면적(macroscopic scattering cross section)을 나타내며, $Q(x,y)$는 고정 중성자원(fixed source)이다. 식(1)의 우변의 $\phi(x,y)$는 중성자속(scalar neutron flux)으로 방향중성자속에 의하여

$$\phi(x,y)=\int\int\psi(x,y,\mu,\eta)\,d\mu d\eta \qquad (2)$$

와 같이 정의된다. 식(1)의 수송방정식은 1계 편미분 방정식으로 방향영역 $-1\le\mu\le1$, $-1\le\eta\le1$에 대해 방향차분법(S_N, discrete Ordinates method)을 적용하는 경우 위치변수에 대해서는 diamond-differencing과 같이 비교적 간단한 유한 차분법을 사용하여 해를 구할 수 있으나, 음수해를 보이거나 극심한 광첨두현상을 나타내는 단점을 보이게 된다.

2.2 우성수송방정식(even-parity transport equation)

우성수송방정식은 식(1)에서 쉽게 유도될 수 있다. 먼저 우성중성자속(even-parity angular flux)와 기성중성자속(odd-parity angular flux)를 각각

$$\chi(\mu,\eta) = \frac{1}{2}[\psi(\mu,\eta) + \psi(-\mu,-\eta)] \tag{3}$$

$$\beta(\mu,\eta) = \frac{1}{2}[\psi(\mu,\eta) - \psi(\mu,\eta)] \tag{4}$$

로 정의한다. 식(1)을 (μ,η) 와 $(-\mu,-\eta)$ 방향에 대하여 적용한 두 식을 가감하여 얻어지는 두 개의 식에서 β를 소거하면, 우성수송방정식

$$-\mu^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \mu\eta\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right] - \eta^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$+\sigma(x,y)\chi(x,y,\mu,\eta) = \sigma_s(x,y)\phi(x,y) + Q(x,y),\ \ 0\le\mu\le 1,\ \ -1\le\eta\le 1 \tag{5}$$

식(5)는 아무런 가정없이 1계 수송방정식으로부터 유도된 또 다른 형태의 2계 수송방정식이다. $\chi(\mu,\eta)$가 방향에 대해 우성인 속성을 가지므로 전체 방향 영역은 원래 1계 수송방정식의 반인 $0\le\mu\le 1,\ -1\le\eta\le 1$로 된다. 하지만, 이는 각 방향에 대해 행렬계산이 요구되고, 반사경계조건(reflective BC)이 다른 방향과 연계되어 추가적인 반복계산이 필요하다.

2.3 단순우성수송방정식(simplified even-parity transport equation)

최근의 우성수송방정식 수치해법에 관한 연구에서 수송방정식에 대한 합리적 근사인 단순우성방정식(simplified even-parity equation)의 개념이 정립되었다. 식(5)의 우성방정식을 방향 (μ,η), $(\mu,-\eta)$ 에 대해 적용하고 $\chi(\mu,\eta)\simeq\chi(\mu,-\eta)$를 가정하여 정리하면

$$-\mu^2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \eta^2\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\chi}{\partial y} + \sigma(x,y)\chi(x,y,\mu,\eta)$$

$$= \sigma_s(x,y)\phi(x,y) + Q(x,y),\ \ 0\le\mu,\eta\le 1 \tag{6}$$

의 단순우성방정식을 얻는다. 이는 방향 영역이 우성방정식의 방향영역의 다시 반으로 줄고, 교차미분항이 나타나지 않는다.

이는 기존 수송방정식에 비하여 해의 절대적 양수성(guaranteed positivity), 높은 가속효율성(acceleration efficiency)을 갖고, 광첨두현상이 나타나지 않는 것으로 검증되었다. 또한단순화된 우성수송방정식은 사용되는 quadrature set을 적절히 변경하여 단순 P_N (simplified P_N)방정식과 같아짐도 보였다. 특히 단순화된 우성방정식의 형태가 위치변수에 대하여 타원형(elliptic) 방정식이므로 노달이론등 기존의 확산이론에서 개발된 방법을 접목하기에 용이하다는 특징을 갖는다.

3. 단순우성방정식에 대한 다항식전개 노달법

본 연구에서는 확산방정식에 대해 개발된 노달법 중 다항식전개 노달법(PEN: Polynomial Expansion Nodal Method)과 해석함수전개 노달법(AFEN: Analytic Function Expansion Method)을 단순우성방정식에 대해 적용한다. 먼저 다항식전개 노달법에 대해 설명한다.

먼저 식(6)의 단순우성방정식에 대한 방향차분식(S$_N$ equations)은 차분방향 m ($1 \le m \le M$)에 대해

$$-\mu_m^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \eta_m^2 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \chi_m}{\partial y} + \sigma(x,y)\chi_m(x,y) = \sigma_s(x,y)\phi(x,y) + Q(x,y) \tag{7}$$

이고, 중성자속은

$$\phi(x,y) = \sum_{m=1}^{M} \omega_m \chi_m(x,y) \tag{8}$$

이다. 다른 형태의 수송방정식에서도 마찬가지지만, 식(7)을 풀기 위해서는 우변의 $\phi(x,y)$ 의 값을 가정하여 $\chi_m(x,y)$ 를 계산하고, 계산된 값으로 식(8)에 의해 $\phi(x,y)$ 를 다시 계산하는 반복계산(source iteration)을 수행하여야 한다. 반복계산을 피하기 위해 우변의 $\sigma_s\phi$항을 우변으로 이항할 수도 있으나 이는 모든 방향에 대해 χ_m 을 동시에 계산하게 되어 비효율적이다.

S$_N$ 단순우성방정식을 σ, σ_s, Q가 일정하도록 나누어진 그림 1과 같은 2차원 사각형 노드 (i,j) 에 적용하면

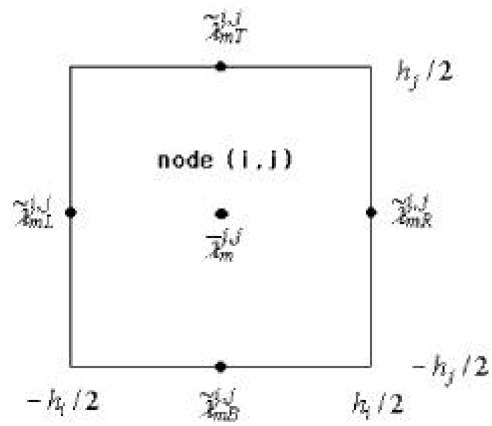

그림 1 사각형 노드

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial^2 \chi_m^{i,j}}{\partial x^2} - \frac{\eta_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial^2 \chi_m^{i,j}}{\partial y^2} + \sigma^{i,j}\chi_m^{i,j}(x,y) = \sigma_s^{i,j}\phi^{i,j}(x,y) + Q^{i,j} \tag{9}$$

이고, 여기서 중성자속은

$$\phi^{i,j}(x,y) = \sum_{m=1}^{M} \omega_m \chi_{mi}^{i,j}(x,y) \tag{10}$$

이다. 먼저, 노드 (i,j) 내의 단순우성중성자속(이하 중성자속) 분포를

$$\chi_m^{i,j}(x,y) = C_{m1}^{i,j} + C_{m2}^{i,j}x + C_{m3}^{i,j}y + C_{m4}^{i,j}x^2 + C_{m5}^{i,j}y^2 \tag{11}$$

로 가정하자. 식(11)의 전개에서 전체 항수는 노드 내에서 정의되는 미지수의 개수와 일치한다. 그림 1의 사각형 노드에 대해 1개의 노드평균중성자속(node average flux)

$$\bar{\chi}_m^{i,j} = \frac{1}{h_i h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\int_{-h_i/2}^{h_i/2} \chi_m^{i,j}(x,y)\,dx\,dy \tag{12a}$$

과 4개의 면평균중성자속(surface average flux)

$$\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\chi_m^{i,j}(-h_i/2, y)\,dy \tag{12b}$$

$$\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(x, -h_j/2)\,dx \tag{12c}$$

$$\tilde{\chi}_{mR}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\chi_m^{i,j}(h_j/2, y)\,dy \tag{12d}$$

$$\tilde{\chi}_{mT}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(x, h_j/2)\,dx \tag{12e}$$

을 정의한다. 식(11)의 전개식을 식(12)에 대입하여 계산하면 노드평균중성자속은

$$\begin{aligned}\bar{\chi}_m^{i,j} &= \frac{1}{h_i h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{h_i h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}(C_{m1}^{i,j} + C_{m2}^{i,j}x + C_{m3}^{i,j}y + C_{m4}^{i,j}x^2 + C_{m5}^{i,j}y^2)\,dx\,dy \\ &= C_{m1}^{i,j} + \frac{1}{12}h_i^2 C_{m4}^{i,j} + \frac{1}{12}h_j^2 C_{m5}^{i,j}\end{aligned} \tag{13a}$$

로 나타나고, 면평균중성자속은 각각

$$\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\chi_m^{i,j}(-h_i/2, y)\,dy = C_{m1}^{i,j} - \frac{1}{2}h_i C_{m2}^{i,j} + \frac{1}{4}h_i^2 C_{m4}^{i,j} + \frac{1}{12}h_j^2 C_{m5}^{i,j} \tag{13b}$$

$$\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(x, -h_j/2)\,dx = C_{m1}^{i,j} - \frac{1}{2}h_j C_{m3}^{i,j} + \frac{1}{12}h_i^2 C_{m4}^{i,j} + \frac{1}{4}h_j^2 C_{m5}^{i,j} \tag{13c}$$

$$\tilde{\chi}_{mR}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\chi_m^{i,j}(h_i/2, y)\,dy = C_{m1}^{i,j} + \frac{1}{2}h_i C_{m2}^{i,j} + \frac{1}{4}h_i^2 C_{m4}^{i,j} + \frac{1}{12}h_j^2 C_{m5}^{i,j} \tag{13d}$$

$$\tilde{\chi}_{mT}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(h_i/2, y)\,dx = C_{m1}^{i,j} + \frac{1}{2}h_j C_{m3}^{i,j} + \frac{1}{12}h_i^2 C_{m4}^{i,j} + \frac{1}{4}h_j^2 C_{m5}^{i,j} \tag{13e}$$

로 나타난다. 식(13)을 행렬로 표시하면

$$\begin{bmatrix}\bar{\chi}_m^{i,j}\\ \tilde{\chi}_{mL}^{i,j}\\ \tilde{\chi}_{mB}^{i,j}\\ \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}\\ \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & h_j^2/12 & h_j^2/12\\ 1 & -h_i/2 & 0 & h_i^2/4 & h_i^2/12\\ 1 & 0 & -h_j/2 & h_j^2/12 & h_j^2/4\\ 1 & h_i/2 & 0 & h_i^2/4 & h_i^2/12\\ 1 & 0 & h_j/2 & h_j^2/12 & h_j^2/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{m1}^{i,j}\\ C_{m2}^{i,j}\\ C_{m3}^{i,j}\\ C_{m4}^{i,j}\\ C_{m5}^{i,j}\end{bmatrix} \tag{14}$$

또는

$$\boldsymbol{\chi}_m = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{C}_m$$

이다. 행렬 $\boldsymbol{A}_m$ 의 역행렬을 이용하여 전개계수는

$$\boldsymbol{C}_m = \boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{\chi}_m$$

또는

$$\begin{bmatrix} C_{m1}^{i,j} \\ C_{m2}^{i,j} \\ C_{m3}^{i,j} \\ C_{m4}^{i,j} \\ C_{m5}^{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/h_i & 0 & 1/h_i & 0 \\ 0 & 0 & -1/h_j & 0 & 1/h_j \\ -6/h_i^2 & -3/h_i^2 & 0 & -3/h_i^2 & 0 \\ -6/h_j^2 & 0 & -3/h_j^2 & 0 & -3/h_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\chi}_m^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mB}^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mR}^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mT}^{i,j} \end{bmatrix} \tag{15}$$

이다. 이를 다시 정리하면

$$C_{m1}^{i,j} = \frac{1}{4}\left(8\bar{\chi}_m^{i,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}\right) \tag{16a}$$

$$C_{m2}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\left(-\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}\right) \tag{16b}$$

$$C_{m3}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\left(-\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}\right) \tag{16c}$$

$$C_{m4} = \frac{3}{h_i^2}\left(-2\bar{\chi}_m^{i,j} + \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}\right) \tag{16d}$$

$$C_{m5}^{i,j} = \frac{3}{h_j^2}\left(-2\bar{\chi}_m^{i,j} + \tilde{\chi}_{mB}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}\right) \tag{16e}$$

을 얻는다. 노드의 각 면에서 m 방향의 면평균중성자류(surface average neutron current)를

$$\tilde{J}_{mL}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2} -\frac{\mu_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial\chi_m^{i,j}}{\partial x}\bigg|_{x=-h_i/2} dy \tag{17a}$$

$$\tilde{J}_{mB}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2} -\frac{\eta_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial\chi_m^{i,j}}{\partial y}\bigg|_{y=-h_j/2} dx \tag{17b}$$

$$\tilde{J}_{mR}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2} -\frac{\mu_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial\chi_m^{i,j}}{\partial x}\bigg|_{x=h_i/2} dy \tag{17c}$$

$$\tilde{J}_{mT}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2} -\frac{\eta_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial\chi_m^{i,j}}{\partial y}\bigg|_{y=h_j/2} dx \tag{17d}$$

와 같이 정의하고 식(11)과 식(16)을 이용하여 계산하면

$$\tilde{J}_{mL}^{i,j} = -\frac{2\mu_m^2}{\sigma^{i,j}h_i}\left(3\bar{\chi}_m^{i,j} - 2\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}\right) \tag{18a}$$

$$\tilde{J}_{mB}^{i,j} = -\frac{2\eta_m^2}{\sigma^{i,j}h_j}\left(3\bar{\chi}_m^{i,j} - 2\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}\right) \tag{18b}$$

$$\tilde{J}_{mR}^{i,j} = -\frac{2\mu_m^2}{\sigma^{i,j}h_i}\left(-3\bar{\chi}_m^{i,j} + 2\tilde{\chi}_{mR}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mL}^{i,j}\right) \tag{18c}$$

$$\tilde{J}_{mT}^{i,j} = -\frac{2\eta_m^2}{\sigma^{i,j}h_j}\left(-3\bar{\chi}_m^{i,j} + 2\tilde{\chi}_{mT}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mB}^{i,j}\right) \tag{18d}$$

로 나타난다. 노드 당 풀어야 할 방정식의 개수는 5개로 이는 식(9)를 노드 체적으로 적분해서 얻어지는 노드평형방정식(node balance equation)

$$\frac{1}{h_ih_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\left[-\frac{\mu_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial^2\chi_m^{i,j}}{\partial x^2} - \frac{\eta_m^2}{\sigma^{i,j}}\frac{\partial^2\chi_m^{i,j}}{\partial y^2} + \sigma^{i,j}\chi_m^{i,j}(x,y)\right]dx\,dy$$

$$= \frac{1}{h_i h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}[\sigma_s^{i,j}\phi^{i,j}(x,y) + Q^{i,j}]dx\,dy$$

또는

$$\frac{1}{h_i}(-\tilde{J}_{mL}^{i,j} + \tilde{J}_{mR}^{ij}) + \frac{1}{h_j}(-\tilde{J}_{mB}^{ij} + \tilde{J}_{mT}^{ij}) + \sigma^{i,j}\bar{\chi}_m^{i,j} = \sigma_s^{ij}\bar{\phi}^{ij} + Q^{ij} \tag{19a}$$

과 그림 2**와 같은 각 노드면에서 면평균중성자속 연속조건**(surface average flux continuity conditions)

$$\tilde{J}_{mL}^{i,j} - \tilde{J}_{mR}^{i-1,j} = 0 \tag{19b}$$

$$\tilde{J}_{mB}^{i,j} - \tilde{J}_{mT}^{i,j-1} = 0 \tag{19c}$$

$$\tilde{J}_{mR}^{i,j} - \tilde{J}_{mL}^{i+1,j} = 0 \tag{19d}$$

$$\tilde{J}_{mT}^{i,j} - \tilde{J}_{mB}^{i,j+1} = 0 \tag{19e}$$

이다.

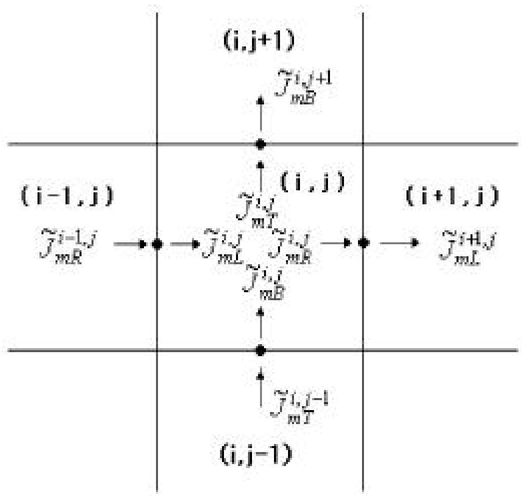

그림 2

식(19)**에 식**(18)**을 적용하면**

$$-\frac{6\mu_m^2}{\sigma^{i,j}h_i^2}(\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - 2\bar{\chi}_m^{i,j} + \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) - \frac{6\eta_m^2}{\sigma^{i,j}h_j^2}(\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - 2\bar{\chi}_m^{i,j} + \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}) + \sigma^{ij}\bar{\chi}_m^{i,j}$$

$$= \sigma_s^{i,j}\bar{\phi}^{i,j} + Q^{i,j} \tag{20a}$$

$$-\frac{1}{\sigma^{i,j}h_i}(3\bar{\chi}_m^{i,j} - 2\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) - \frac{1}{\sigma^{i-1,j}h_j}(3\bar{\chi}_m^{i-1,j} - 2\tilde{\chi}_{mR}^{i-1,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i-1,j}) = 0 \tag{20b}$$

$$-\frac{1}{\sigma^{i,j}h_j}(3\bar{\chi}_m^{i,j} - 2\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}) - \frac{1}{\sigma^{i,j-1}h_{j-1}}(3\bar{\chi}_m^{i,j-1} - 2\tilde{\chi}_{mT}^{i,j-1} - \tilde{\chi}_{mB}^{i,j-1}) = 0 \tag{20c}$$

$$-\frac{1}{\sigma^{i,j}h_i}(3\bar{\chi}_m^{i,j} - 2\tilde{\chi}_{mR}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i,j}) - \frac{1}{\sigma^{i+1,j}h_{i+1}}(3\bar{\chi}_m^{i+1,j} - 2\tilde{\chi}_{mL}^{i+1,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i+1,j}) = 0 \tag{20d}$$

$$-\frac{1}{\sigma^{i,j}h_j}(3\bar{\chi}_m^{i,j} - 2\tilde{\chi}_{mT}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mB}^{i,j}) - \frac{1}{\sigma^{i,j+1}h_{j+1}}(3\bar{\chi}_m^{i,j+1} - 2\tilde{\chi}_{mB}^{i,j+1} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j+1}) = 0 \tag{20e}$$

식(20a)의 노드평형방정식은 노드 (i,j)내의 1개의 노드평균중성자속과 4개의 면평균중성자속의 5점 관계(5-point relation)로 나타나고, 식(20b)-(20e)의 면평균중성자류 연속조건은 각 방향에 대해 이웃 노드와의 6점 관계로 나타남을 알 수 있다. 이를 종합하면 식(20)은 그림 3과 같이 모두 13점 관계식으로 나타나게 된다.

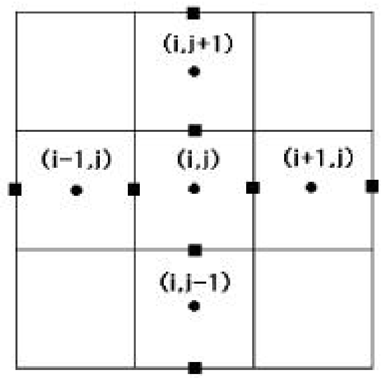

그림 3

4. 단순우성방정식에 대한 해석함수전개 노달법

여기에서는 단순우성방정식에 대한 해석함수전개 노달법(AFEN:Analytic Function Expansion Nodal Method)을 설명한다. 앞의 다항식전개 노달법에서와 같이 그림 1과 같은 노드에 대해 S_N 단순우성방정식

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma}\frac{\partial^2\chi_m}{\partial x^2}-\frac{\eta_m^2}{\sigma}\frac{\partial^2\chi_m}{\partial y^2}+\sigma\chi_m(x,y)=\sigma_s\phi(x,y)+Q \tag{9}$$

를 사용한다. (편의상 노드 표기 i,j 를 생략함.)

식(9)의 S_N 단순우성방정식은 기존의 확산방정식과는 달리 식의 우변이 0이 아닌 nonhomogeneous 문제가 된다. [이를 homogeneous 문제로 변환하기 위하여 우변의 $\sigma_s\phi(x,y)$ 을 $\sigma_s\sum_{m=1}^{M}\chi_m(x,y)$ 로 바꾸어 좌변으로 이항하는 것은 좌변을 모든 방향에 대해 동시에 풀어야 하므로 비효율적이다.] 따라서, 식(9)의 해석해는 homogeneous solution과 particular solution의 합으로 나타나게 되고, particular solution을 구하기 위해서는 $\phi(x,y)$ 를 알아야 한다. $\phi(x,y)$ 에 대해 여러 가지 함수를 사용할 수 있겠지만, 여기서는 문제를 단순하게 하기 위하여 각각의 반복계산에서 우변의 중성자원을 상수로 취급하는 flat source approximation

$$\sigma_s\phi(x,y)+Q\equiv S(x,y)\approx\overline{S} \tag{21}$$

을 사용한다. 식(9)의 해석해 중 nonhomogeneous solution을 구하기 위해서는 $S(x,y)$ 의 분포를 적당한 함수로 근사해야 한다. 하지만 이는 사용되는 함수형태에 따라 각기 다른 해석해를 제공하게 되어 많은 종류의 노달법이 생기게 된다. 본 연구에서는 우선 가장 단순한 형태인 상수로 가정하여 그 결과를 보겠다. 따라서, 식(21)의 가정을 이용하면 식(9)는

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma}\frac{\partial^2\chi_m}{\partial x^2}-\frac{\eta_m^2}{\sigma}\frac{\partial^2\chi_m}{\partial y^2}+\sigma\chi_m(x,y)=\overline{S} \tag{22}$$

로 나타난다. 식(22)에 대한 homogeneous 방정식은

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma^2}\frac{\partial^2\chi_m^h}{\partial x^2}-\frac{\eta_m^2}{\sigma^2}\frac{\partial^2\chi_m^h}{\partial y^2}+\chi_m^h(x,y)=0 \tag{23}$$

이고, 변수분리법을 사용하여 $\chi_m^h(x,y)=X_m(x)\,Y_m(y)$ 로 나타내면

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma^2}X_m^{''}Y_m-\frac{\eta_m^2}{\sigma^2}X_mY_m^{''}+X_m(x)\,Y_m(y)=0 \tag{24}$$

이다. 양변을 X_mY_m 로 나누면

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma^2}\frac{X_m^{''}}{X_m}-\frac{\eta_m^2}{\sigma^2}\frac{Y_m^{''}}{Y_m}+1=0 \tag{24}$$

이다. 따라서,

$$\frac{\mu_m^2}{\sigma^2}\frac{X_m^{''}}{X_m}=\alpha^2 \tag{24a}$$

$$\frac{\eta_m^2}{\sigma^2}\frac{Y_m^{''}}{Y_m}=\beta^2 \tag{24b}$$

로 놓으면, 이들의 해는

$$\alpha_k^2+\beta_k^2=1 \tag{25}$$

을 만족하는 무한개의 고유값 $\alpha_k,\ \beta_k\ (k=1,2,\cdots)$에 대해

$$X_{mk}(x)=C_1\cosh\left(\frac{\sigma\alpha_kx}{\mu_m}\right)+C_2\sinh\left(\frac{\sigma\alpha_kx}{\mu_m}\right) \tag{26a}$$

$$Y_{mk}(x)=C_3\cosh\left(\frac{\sigma\beta_ky}{\eta_m}\right)+C_4\sinh\left(\frac{\sigma\beta_ky}{\eta_m}\right) \tag{26b}$$

이 된다. 즉, 식(23)의 해는 식(25)를 만족하는 모든 고유값에 대해

$$\chi_m^h(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cosh\left(\frac{\sigma\alpha_kx}{\mu_m}+\frac{\sigma\beta_ky}{\eta_m}\right)+B_k\sinh\left(\frac{\sigma\alpha_kx}{\mu_m}+\frac{\sigma\beta_ky}{\eta_m}\right)\right] \tag{27}$$

로 나타낼 수 있게 된다. 한편, 식(22)의 particular solution은 우변을 상수로 가정했으므로

$$\chi_m^p(x,y)=A_0\quad(A_0\text{는 상수})$$

가 되어, 식(22)의 해석해는

$$\begin{aligned}\chi_m(x,y)&=\chi_m^h(x,y)+\chi_m^p(x,y)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\cosh\left(\frac{\sigma\alpha_kx}{\mu_m}+\frac{\sigma\beta_ky}{\eta_m}\right)+B_k\sinh\left(\frac{\sigma\alpha_kx}{\mu_m}+\frac{\sigma\beta_ky}{\eta_m}\right)\right]+A_0\end{aligned} \tag{28}$$

이 된다.

식(28)에서 미정계수(undetermined coefficient) $A_0,\ A_k,\ B_k\ (k=1,2,\cdots)$는 1개 노드 내에서 정의되는 미지수의 수에 의해 결정된다. 여기서는 노드 당 5개의 미지수를 정의하였으므로 식(25)를 만족하는 $\alpha_k,\ \beta_k$ 두 쌍이 필요하게 되고 이를 $\alpha_1=0,\ \beta_1=1$과 $\alpha_2=1,\ \beta_2=0$ 을 취하였

다. [실제로 식(28)이 식(22)를 만족하지만 올바른 해석해가 되기 위해서는 $\alpha = 0$과 $\beta = 0$을 취할 수 없다. 왜냐하면 식(24)에서 우변이 0인 경우에는 일반해가 쌍곡선 함수가 아니고 일차함수가 되기 때문이다. 이러한 오류는 기존의 AFEN법에서도 마찬가지로 발생했던 것으로 보인다.] 이 때 식(28)은

$$\chi_m^{i,j}(x,y) = C_{m1}^{i,j} + C_{m2}^{i,j}\cosh\left(\frac{\sigma^{i,j}x}{\mu_m}\right) + C_{m3}^{i,j}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}x}{\mu_m}\right) + C_{m4}^{i,j}\cosh\left(\frac{\sigma^{i,j}y}{\eta_m}\right) + C_{m5}^{i,j}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}y}{\eta_m}\right) \qquad (29)$$

과 같은 형태로 단순해진다. 그림 1의 사각형 노드에 대해 1개의 노드평균중성자속(node average flux)과 4개의 면평균중성자속(surface average flux)을 식(12)와 동일하게 정의하고 식(29)의 전개식을 이용하여 계산하면 노드평균중성자속은

$$\bar{\chi}_m^{i,j} = \frac{1}{h_i h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= C_{m1}^{i,j} + \frac{2\mu_m}{\sigma^{i,j}h_i}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m2}^{i,j} + \frac{2\eta_m}{\sigma^{i,j}h_j}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m4}^{i,j} \qquad (30a)$$

로 나타나고, 면평균중성자속은 각각

$$\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\chi_m^{i,j}(-h_i/2,y)\,dy$$

$$= C_{m1}^{i,j} + \cosh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m2}^{i,j} - \sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m3}^{i,j} + \frac{2\eta_m}{\sigma^{i,j}h_j}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m4}^{i,j} \qquad (30b)$$

$$\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(x,-h_j/2)\,dx$$

$$= C_{m1}^{i,j} + \frac{2\mu_m}{\sigma^{i,j}h_i}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m2}^{i,j} + \cosh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m4}^{i,j} - \sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m5}^{i,j} \qquad (30c)$$

$$\tilde{\chi}_{mR}^{i,j} = \frac{1}{h_j}\int_{-h_j/2}^{h_j/2}\chi_m^{i,j}(h_i/2,y)\,dy$$

$$= C_{m1}^{i,j} + \cosh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m2}^{i,j} + \sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m3}^{i,j} + \frac{2\eta_m}{\sigma^{i,j}h_j}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m4}^{i,j} \qquad (30d)$$

$$\tilde{\chi}_{mT}^{i,j} = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i/2}^{h_i/2}\chi_m^{i,j}(h_i/2,y)\,dx$$

$$= C_{m1}^{i,j} + \frac{2\mu_m}{\sigma^{i,j}h_i}\sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}\right)C_{m2}^{i,j} + \cosh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m4}^{i,j} + \sinh\left(\frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}\right)C_{m5}^{i,j} \qquad (30e)$$

로 나타난다.

$$x = \frac{\sigma^{i,j}h_i}{2\mu_m}, \quad y = \frac{\sigma^{i,j}h_j}{2\eta_m}$$

$$c_x = \cosh x, \quad c_y = \cosh y, \quad s_x = \sinh x, \quad s_y = \sinh y$$

로 놓고 식(30)을 행렬로 표시하면

$$\boldsymbol{\chi}_m = \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{C}_m$$

이다. 여기서

$$\boldsymbol{\chi}_m = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_m^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mB}^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mR}^{i,j} \\ \tilde{\chi}_{mT}^{i,j} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & s_x/x & 0 & s_y/y & 0 \\ 1 & c_x & -s_x & s_y/y & 0 \\ 1 & s_x/x & 0 & c_y & -s_y \\ 1 & c_x & s_x & s_y/y & 0 \\ 1 & s_x/x & 0 & c_y & s_y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_m = \begin{bmatrix} C_{m1}^{i,j} \\ C_{m2}^{i,j} \\ C_{m3}^{i,j} \\ C_{m4}^{i,j} \\ C_{m5}^{i,j} \end{bmatrix}$$

이다. 행렬 $\boldsymbol{A}_m$ 의 역행렬을 이용하면 전개계수는

$$\boldsymbol{C}_m = \boldsymbol{A}_m^{-1} \boldsymbol{\chi}_m$$

이 되는데, 여기서

$$\boldsymbol{A}_m^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{xyc_xc_y - s_xs_y}{(s_x - xc_x)(s_y - yc_y)} & \dfrac{s_x}{2(s_x - xc_x)} & \dfrac{s_y}{2(s_y - yc_y)} & \dfrac{s_x}{2(s_x - xc_x)} & \dfrac{s_y}{2(s_y - yc_y)} \\ \dfrac{x}{s_x - xc_x} & -\dfrac{x}{2(s_x - xc_x)} & 0 & -\dfrac{x}{2(s_x - xc_x)} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2s_x} & 0 & \dfrac{1}{2s_x} & 0 \\ \dfrac{y}{s_y - yc_y} & 0 & -\dfrac{y}{2(s_y - yc_y)} & 0 & -\dfrac{y}{2(s_y - yc_y)} \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2s_y} & 0 & \dfrac{1}{2s_y} \end{bmatrix}$$

이다. 이를 다시 정리하면

$$C_{m1}^{i,j} = \frac{xyc_xc_y - s_xs_y}{(s_x - xc_x)(s_y - yc_y)} \bar{\chi}_m^{i,j} + \frac{s_x}{2(s_x - xc_x)} (\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mR}^{i,j})$$
$$+ \frac{s_y}{2(s_y - yc_y)} (\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} + \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}) \tag{31a}$$

$$C_{m2}^{i,j} = \frac{x}{2(s_x - xc_x)} (2\bar{\chi}_m^{i,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) \tag{31b}$$

$$C_{m3}^{i,j} = \frac{1}{2s_x} (\tilde{\chi}_{mR}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i,j}) \tag{31c}$$

$$C_{m4}^{i,j} = \frac{y}{2(s_y - yc_y)} (2\bar{\chi}_m^{i,j} - \tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}) \tag{31d}$$

$$C_{m5}^{i,j} = \frac{1}{2s_y} (\tilde{\chi}_{mT}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mB}^{i,j}) \tag{31e}$$

을 구한다. 식(17)과 같이 노드의 각 면에서 m 방향의 면평균중성자류(surface average neutron current)를 정의하고 식(29)와 식(31)을 이용하여 계산하면

$$\tilde{J}_{mL}^{i,j} = \frac{\mu_m}{2} \left[\left(\frac{c_x}{s_x}\right)^{i,j} (\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) + \left(\frac{xs_x}{s_x - xc_x}\right)^{i,j} (2\bar{\chi}_m^{i,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) \right] \tag{32a}$$

$$\tilde{J}_{mB}^{i,j} = \frac{\eta_m}{2} \left[\left(\frac{c_y}{s_y}\right)^{i,j} (\tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}) + \left(\frac{ys_y}{s_y - yc_y}\right)^{i,j} (2\bar{\chi}_m^{i,j} - \tilde{\chi}_{mB}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mT}^{i,j}) \right] \tag{32b}$$

$$\tilde{J}_{mR}^{i,j} = \frac{\mu_m}{2} \left[\left(\frac{c_x}{s_x}\right)^{i,j} (\tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) - \left(\frac{xs_x}{s_x - xc_x}\right)^{i,j} (2\bar{\chi}_m^{i,j} - \tilde{\chi}_{mL}^{i,j} - \tilde{\chi}_{mR}^{i,j}) \right] \tag{32c}$$

$$\tilde{J}^{i,j}_{mT} = \frac{\eta_m}{2}\left[\left(\frac{c_y}{s_y}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mT}) - \left(\frac{ys_y}{s_y - yc_y}\right)^{i,j}(2\bar{\chi}^{i,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mT})\right] \qquad (32d)$$

로 나타난다. 식(32)**를 식**(19)**의 노드평형방정식과 면평균중성자속 연속조건에 적용하여**

$$-\frac{\mu_m}{h_i}\left(\frac{xs_x}{xc_x - s_x}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mL} - 2\bar{\chi}^{i,j}_{m} + \tilde{\chi}^{i,j}_{mR}) - \frac{\eta_m}{h_j}\left(\frac{ys_y}{yc_y - s_y}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - 2\bar{\chi}^{i,j}_{m} + \tilde{\chi}^{i,j}_{mT})$$
$$+ \sigma^{ij}\bar{\chi}^{i,j}_{m} = \sigma^{i,j}_{s}\bar{\phi}^{i,j} + Q^{i,j} \qquad (33a)$$

$$\left(\frac{c_x}{s_x}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mR}) + \left(\frac{xs_x}{s_x - xc_x}\right)^{i,j}(2\bar{\chi}^{i,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mR})$$
$$= \left(\frac{c_x}{s_x}\right)^{i-1,j}(\tilde{\chi}^{i-1,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i-1,j}_{mR}) - \left(\frac{xs_x}{s_x - xc_x}\right)^{i-1,j}(2\bar{\chi}^{i-1,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i-1,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i-1,j}_{mR}) \qquad (33b)$$

$$\left(\frac{c_y}{s_y}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mT}) + \left(\frac{ys_y}{s_y - yc_y}\right)^{i,j}(2\bar{\chi}^{i,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mT})$$
$$= \left(\frac{c_y}{s_y}\right)^{i,j-1}(\tilde{\chi}^{i,j-1}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j-1}_{mT}) - \left(\frac{ys_y}{s_y - yc_y}\right)^{i,j-1}(2\bar{\chi}^{i,j-1}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j-1}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j-1}_{mT}) \qquad (33c)$$

$$\left(\frac{c_x}{s_x}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mR}) - \left(\frac{xs_x}{s_x - xc_x}\right)^{i,j}(2\bar{\chi}^{i,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mR})$$
$$= \left(\frac{c_x}{s_x}\right)^{i+1,j}(\tilde{\chi}^{i+1,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i+1,j}_{mR}) + \left(\frac{xs_x}{s_x - xc_x}\right)^{i+1,j}(2\bar{\chi}^{i+1,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i+1,j}_{mL} - \tilde{\chi}^{i+1,j}_{mR}) \qquad (33d)$$

$$\left(\frac{c_y}{s_y}\right)^{i,j}(\tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mT}) - \left(\frac{ys_y}{s_y - yc_y}\right)^{i,j}(2\bar{\chi}^{i,j}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j}_{mT})$$
$$= \left(\frac{c_y}{s_y}\right)^{i,j+1}(\tilde{\chi}^{i,j+1}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j+1}_{mT}) + \left(\frac{ys_y}{s_y - yc_y}\right)^{i,j+1}(2\bar{\chi}^{i,j+1}_{m} - \tilde{\chi}^{i,j+1}_{mB} - \tilde{\chi}^{i,j+1}_{mT}) \qquad (33e)$$

식(33)**의 차분방정식 또한 다항식전개 노달법에서와 마찬가지로 그림**3**과 같은** 13**점 관계식으로 나타난다.**

5. 수치계산 및 결과

앞에서 유도한 단순우성수송방정식에 대한 다항식전개 노달법과 해석함수전개 노달법을 그림 4 **의 문제에 적용하였다. 사용된 물질의 단면적은 표** 1**에 나타난다.**

먼저 1**계** Boltzmann **수송방정식, 이의 근사인 단순우성방정식, 확산방정식의 계산을 비교한 결과를 그림** 5**에 나타내었다.** 1**계** Boltzmann **수송방정식(그림** 5**의** DD)**은** DD(Diamond-Differencing), **단순우성방정식(그림** 5**의** FDM)**은 유한차분법**(FDM: Finite Difference Method)**을 사용하였고 공히** S_4 **계산을 하였다. 확산방정식(그림** 5**의** Diff)**은** FDM**의 점모델**(point-scheme)**을 사용하였고 수송이론의 진공조건을** Marshak **조건으로 대체하였다. 세 가지 계산 모두 격자크기는** 24×24**로 같게 하여 서로 다른 방정식에 의한 차이만을 보이도록 하였다. 결과는 수송방정식과 확산방정식의 경우 완전 흡수체 영역에서 작은 차이를 보였는데 단순우**

성방정식은 수송방정식과 잘 일치하였다.

그림 6은 같은 문제에 대하여 단순우성방정식을 유한차분법(FDM), 다항식전개 노달법(PEN), 해석함수전개 노달법(AFEN)으로 24×24 격자로 계산한 결과를 보인다. 하나의 격자크기가 약 1/2 mean free path에 해당하는 비교적 세밀한 격자에 대해 세 가지 방법 모두 일치된 결과를 보임을 알 수 있다. 이는 또한 기존 확산방정식에 대해 개발되었던 다항식전개 노달법, 해석함수전개 노달법이 단순우성방정식의 해법으로도 잘 적용될 수 있음을 나타낸다.

그림 7, 그림 8, 그림 9는 단순우성방정식을 각각 다항식전개 노달법, 해석함수전개 노달법, 유한차분법으로 격자크기를 변화시켜가며 계산한 결과를 나타낸다. 노달계산의 특징으로 실제 원자로 해석시 집합체 단위의 큰 격자에 대해서도 계산 결과가 정확하다는 점을 꼽을 수 있는데 본 계산에서는 비교적 큰 격자에 대해서 다항식전개 노달법이나 해석함수전개 노달법이 유한차분법에 비해 약간의 정확성을 보이기는 하나 그 효과는 뚜렷하지 않았다. 본 계산에서는 사각형 격자에 대해 1개의 노드평균중성자속과 4개의 면평균중성자속, 총 5개의 미지수만을 사용하여 계산하였는데, 실제 확산방정식의 계산에서도 이외에 추가로 4개의 꼭지점 중성자속이나 가중된 면평균 중성자속을 사용하여 정확도를 높이고 있으므로 단순우성방정식에 대한 노달 계산에서도 같은 효과를 기대할 수 있으리라 예상된다.

6. 논의

본 연구의 목적은 확산방정식과 같은 타원형 편미분방정식의 형태를 갖으면서도 수송방정식을 보다 정확히 근사하는 단순우성방정식에 대해 기존의 확산방정식의 해법으로 개발된 해석함수전개 노달이론을 적용하는 것이었다. 기존의 노달법에서는 계산 정확도를 증가시키기 위해 일 개 사각형 노드 당 9개 이상의 많은 수의 미지수를 사용하였지만 본 연구에서는 방법론 개발에 목적이 있으므로 5개의 미지수만을 정의하여 사용하였다. 계산된 결과는 기존의 유한차분법의 결과와 비교하여 기존의 노달방법이 단순우성방정식에도 잘 적용될 수 있음을 보였다. 본 연구에서 개발된 방법에 꼭지점중성자속등 기존 확산방정식에서 사용하고 있는 미지수를 추가함으로써 정확도를 증가시킬 수 있을 것으로 예상된다. S_N 수송방정식(단순우성방정식 포함)의 경우 식의 우변에 중성자속(scalar flux)이 나타나고, 이는 이전 반복계산 단계에서의 방향중성자속(angular flux)으로 계산되어야 하며, 이를 위해 source iteration이나 확산가속(DSA: Diffusion Synthetic Acceleration)이 필요하게 된다. 해석함수전개 노달법의 경우 단순우성방정식의 해석해 중 nonhomogeneous solution을 구하기 위해서는 우변에 존재하는 중성자속에 대한 분포함수를 고려해야만 하고, 사용되는 함수형태에 따라 여러 가지 다른 방법이 있을 수 있으며, 해법을 매우 복잡하게 한다. 풀고자 하는 방정식의 해석해를 수치해의 기저로 사용한다는 것이 해석함수전개 노달법의 목적이라고 볼 때 우변의 중성자속에 대해 분포함수를 가정하여 사용한다는 것이 무의미할 수 있고, 어떤 분포함수를 추가하는 것은 격자 내의 미지함수의 수를 증가시키는 것과 결과적으러 다름이 없으므로 본 연구에서는 중성자속의 분포함수를 가장 간단한 형태인 상수로 가정하여 전체 해법을 단순화하였다. 실제로 우변의 중성자속은 매 반복 단계에서 계산된 방향중성자속을 단순히 방향에 대해서만 적분하여 계산하였고, 계산결과는 이러한 방법의 타당성을 보여주고 있다.

참고문헌

1) Taewan. Noh, W. F. Miller, Jr., and J. E. Morel, "The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equation in Two-Dimensional X-Y Geometry", Nucl. Sci. Eng. 123, 38-56 (1996, 4)

2) Taewan. Noh, W. F. Miller, Jr., and J. E. Morel, "Improved Approximations Applied to the S_N Even-Parity Equations", Trans. Am. Nucl. Soc., 69, 214 (1993)

3) J. J. Duderstadt and W. R. Martin, Transport Theory, John Wiley & Sons (1979)

4) E. E. Lewis and W. F. Miller, Jr., Computational Methods of Neutron Transport, John Wiley & Sons (1993)

5) 노재만, "원자로 노심설계를 위한 해석함수전개 노달방법", 박사학위논문, 한국과학기술원, 199. 5

6) 조진영, "육방형 노심설계 해석용 다항식전개 노달해법의 개발, 박사학위논문, 서울대학교, 1997. 2

Region	σ	σ_s	Q
A	1.0	0.9	1.0
B	1.0	0.0	0.0

표 1

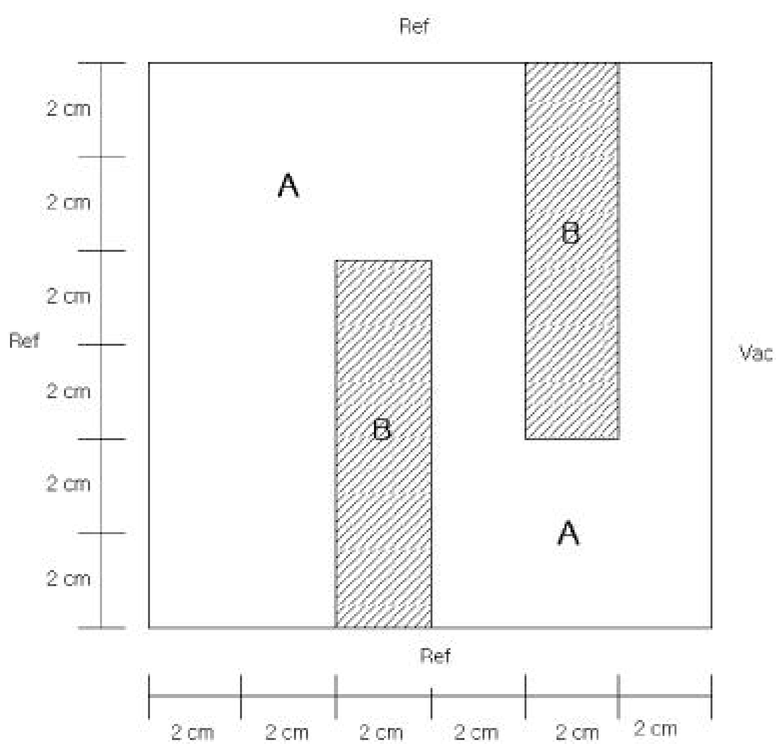

그림 4

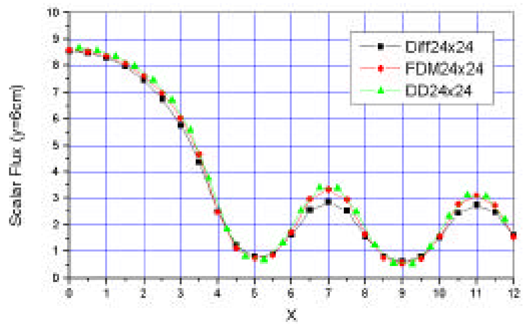

그림 5

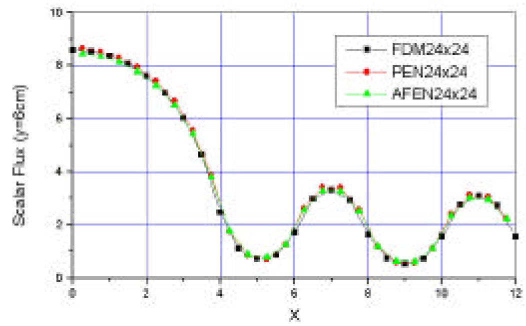

그림 6

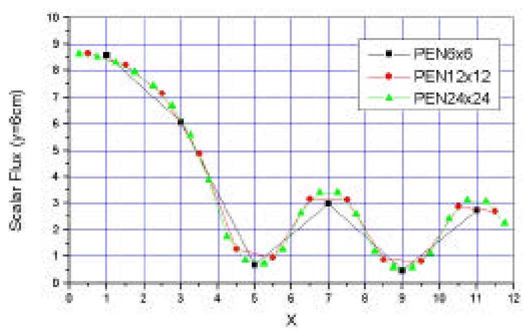

그림 7

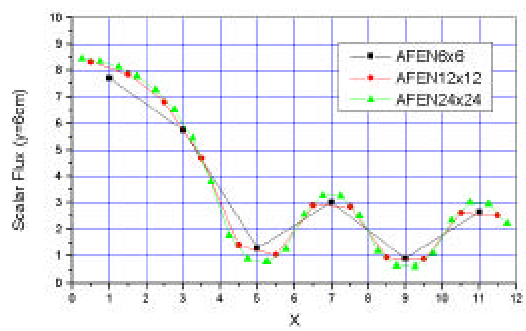

그림 8

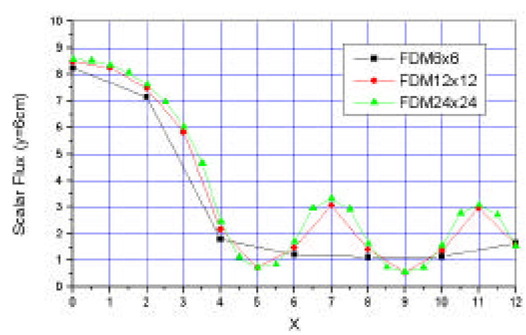

그림 9