2000 추계학술발표회 논문집
한국원자력학회

비정렬 유한체적법을 이용한 내부열원이 있는 2 유체의 자연대류 현상 해석

Analysis of Two-Layered Natural Convection in a Pool with Heat Generation by Unstructured FVM

김종태, 박래준, 김상백

한국원자력연구소
대전광역시 유성구 덕진동 150

요 약

용기 내에서 열원이 존재하는 유체가 층을 이루는 경우에 대한 자연대류 및 열전달 현상을 해석하였다. 반원 모양의 2 차원 형상 및 축대칭 반구 내부에서의 대류 열전달을 수치해석 하였으며, 층이 없는 경우와 층이 있는 경우에 대한 유동 및 열전달 특성을 비교하고 외벽에서의 Nu 수 분포를 분석하였다. 층간 경계를 포함하는 반구형상은 경계의 비직교성이 심하여 비정렬격자를 사용하였으며, 유한체적법으로 지배방정식을 이산화하였다. 층간 경계는 고정된 것으로 가정하였으며 그 경계를 통해 질량이동은 없으나, 전단력에 의한 운동량의 전달 그리고 전도에 의한 열전달 등은 고려하였다. 압력과 속도성분을 모두 셀의 중심에 저장하는 비엇갈림 격자기법 사용하였다. 부력과 같은 큰 체력의 효과를 고려하여 셀 면에서의 속도를 보간하였으며 외벽에서의 압력은 체력을 고려하여 외삽하였다. 본 수치해법으로 계산된 결과에서 하향 열속은 단일층 보다 2층으로 된 풀에서 증가함을 보여준다.

Abstract

The natural convection and heat transfer in a stratified pool with internal heat source are studied. Two dimensional semicircular or axi-symmetric hemispherical geometry is modeled to investigate convective heat transfer. The flow and heat transfer characteristics are compared between single-layered and double-layered pools. And local Nusselt number distributions on the outer walls are obtained to consider thermal loads on the vessel wall. The unstructured mesh is chosen for this study because of the non-orthogonality originated from the boundaries of double-layered pool. The interface between the layers is modeled to be fixed. With this assumption mass flux across the interface is neglected, but shear force and heat flux by conduction are considered by the boundary conditions. The colocated cell-centered finite volume method is used with the modified Rhie-Chow interpolation to include body force effect. The wall pressure is extrapolated by the way to include body force. The numerical solutions calculated by current method shows that averaged downward heat flux of the double-layered pool increases compared to single-layered pool.

1. 서 론

단일 유체로 채워진 용기내의 자연대류 현상에 대해서는 오랫동안 실험과 수치해석을 통해 많이 연구되어져 왔으나 유체가 층을 이루고 있는 경우에 대해서는 그렇지 못하였다.
원자력 발전소의 중대사고시에 원자로 노심의 용융으로 인하여 그 용융물은 원자로 압력용기의 하반구에 재배치된 상태에서 자연대류를 포함하는 냉각과정을 거치게 된다. 지금까지의 대부분의 연구는 용융물을 하나의 혼합된 물질로 간주하고 단일 유체의 자연대류현상으로 모의하였다. 그러나 RASPLAV 관련 실험연구[1]에서 코륨 용융물은 우라늄이 많은 층과 지르코늄이 많은 층으로 나뉘어지는 성층화 현상이 일어난다고 관찰되었다. 그리고 이 성층화된 용융 풀은 자연대류에 의한 열단달 현상에 큰 영향을 미친다.
Prakash, Koster[2] 등은 자연대류의 유속을 억제시키기 위한 방법으로 2층 유체의 유동현상을 실험과 계산을 통해 연구하였다. Schramm, Reineke[3] 등은 내부에 열원이 있는 서로 다른 유체가 사각 용기 내에서 수평층을 이루고 있을 때 자연대류현상에 대해 실험과 계산을 수행하였다. 최근에 Gubaidullin, Sehgal[4] 등은 CFX 상용코드를 활용하여 2차원 반구내에서 두 개의 층으로 나뉘어진 유체의 열원에 의한 자연대류현상을 해석하고 단일유체의 열전달 특성과 비교하였다.
본 논문에서는 용기 내부에서 성층화된 유체의 자연대류 및 열전달 현상을 해석하기 위한 수치모델을 개발하고 열원을 포함하는 2층 유체의 열전달 현상을 해석하였다.
유체층 사이의 경계를 포함하는 2차원 반구모형은 외부경계의 비직교성으로 인하여 단일 블록의 격자를 생성하는 것은 불가능하다. 다중블록의 격자를 사용할 수 있으나 이 경우 블록의 수는 크게 증가할 것이고 블록간의 인접면 부근에서는 여전히 찌그러짐이 심한 격자가 생성될 수 있다. 그리고 일반적인 좌표변환을 사용하는 수치해석 코드는 이런 찌그러짐이 심한 격자를 사용하는 경우 큰 수치오차를 만들어 낸다. 반면 비정렬격자는 어떤 복잡한 형상에서도 격자의 생성이 가능할 뿐 아니라 격자의 찌그러짐에 대해서도 매우 유연하기 때문에[5] 본 연구에서는 비정렬격자를 사용하는 수치기법을 적용하였다. 각 격자 셀을 검사체적으로 하여 유한체적법으로 지배방정식을 이산화하였다. 압력과 속도 등 모든 변수를 셀의 중심에 저장하는 셀중심기법을 사용하였으며 압력과 속도의 분리현상을 막기 위하여 Rhie-Chow 내삽법[6]을 사용하였다. 자연대류와 같이 체력이 크고 유동의 큰 힘으로 작용하는 경우 해가 불안정해질 수 있으며 이를 보완하기 위해 수정된 Rhie-Chow법[7]을 사용하고, 외벽에서의 압력은 체력을 고려해 외삽함으로써 오차를 줄였다.

2. 지배방정식과 수치해법

2.1 지배방정식

질량, 운동량 그리고 에너지의 보존방정식을 적분형 일반 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho C\phi r d\Omega + \oint \rho C\phi \vec{V}\cdot r\,\overrightarrow{dA} = \oint \Gamma^{\phi}\nabla\phi\cdot r\,\overrightarrow{dA} + \int_{\Omega} S^{\phi} r d\Omega \qquad (1)$$

변수 ϕ는 $[1,u,v,T]$ 이며, C는 변수가 온도 T 인 경우만 비열 C_p를 나타내고 그외에는 1의 값을 갖는다.

$$S^{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial x} + (\rho - \rho_{ref})g_x \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + (\rho - \rho_{ref})g_y \\ Q_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma^{\phi}\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma^{\phi}\frac{\partial v}{\partial x}) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma^{\phi}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma^{\phi}\frac{\partial v}{\partial y}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Au \\ Av \\ \frac{\partial \rho\Delta H}{\partial t} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

S_ϕ는 원천항을 나타내는 것으로 첫 번째 항은 압력구배와 부력 그리고 열원 등을 포함한다. 두 번째 항은 점도의 변화에 따라 발생하는 점성 플럭스로서 온도에 따른 점도변화, 난류유동의 와점도 등에 의해 발생한다. 그리고 세 번째 항은 용융물의 고화와 같이 상이 변화할 때 발생하는 잠열과 고화된 부분에서 운동량에 대한 저항을 의미한다. 2차원 유동에서는 r이 1이며, 축대칭 유동인 경우 r은 그 대칭 축(x 혹은 y)을 나타내며 각각에 대한 축대칭 원천항이 발생한다. x-축에 대칭인 경우 $-2\mu v/y^2$ 값이 S_v에 더해지며, y-축에 대칭인 경우 $-2\mu u/x^2$ 값이 S_u에 더해진다. 체력항의 크기를 줄이기 위해 $\rho_{ref}\mathbf{g}$ 를 압력구배에 첨가함으로써 p는 압력에 정수압을 포함한 수정압력이 된다. 비압축성 유체에서 밀도는 온도만의 함수이며 온도차가 매우 크지 않으면 Boussinesq 가정을 이용하여 부력항의 밀도를 제외한 다른 항들에서 밀도변화를 무시 할 수 있다. 그리고 부력항을 체적팽창계수(β)를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$(\rho - \rho_{ref})\mathbf{g} = -\beta\rho_{ref}(T - T_{ref})\mathbf{g}$$

2.2 이산화 기법

수치계산 영역은 임의의 모양의 셀로 구성되며 각각의 셀이 바로 검사체적이 되고 압력과 속도 성분을 모두 셀의 중심에 저장하는 셀중심 유한체적법을 사용하였다. 각 셀은 여러 개의 면으로 이루어져 있고 각 면의 중심에서 플럭스를 계산하여 적분한다.

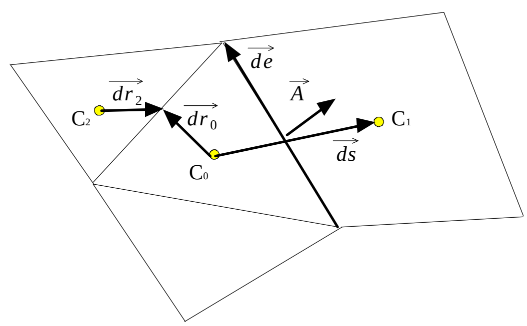


Fig. 1 Control volume and geometric vectors for discretisation

대류항

셀의 각 검사면에서 질량유속 J_f를 이용하여 대류항을 다음과 같이 이산화 형태로 표현할 수 있다.

$$\int \phi(\rho\vec{V} \cdot \vec{dA}) \approx \sum_f \phi_f J_f A_f = \sum_f C_f \quad (3)$$

그리고 적분면 상에서의 ϕ_f 는 상류의 셀 값을 이용하여 구한다.

$$\phi_f = \phi_{upwind} + \nabla\phi_{upwind} \cdot \vec{dr} \quad (4)$$

여기서 $\vec{dr}$는 상류 셀 중심에서 적분면의 중심을 향하는 변위 벡터이고, $\nabla\phi$는 상류 셀의 중심에서 변수 ϕ의 구배이다. 이산화 방정식을 구성할 때, ϕ항은 내재적으로 처리하고 $\nabla\phi$항은 원천항에 첨가함으로써 외재적으로 처리한다. 이것을 deferred correction 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$C_f = C_f^{FO} + [C_f^{SO} - C_f^{FO}]$$

$$C_f^{FO} = \max(J_f,0)\phi_0 + \mathrm{mim}(J_f,0)\phi_1 \quad (5)$$

$$[C_f^{SO} - C_f^{FO}] = \max(J_f,0)\,\nabla\phi_0 \cdot \vec{dr_0} + \mathrm{mim}(J_f,0)\,\nabla\phi_1 \cdot \vec{dr_1}$$

상첨자 FO는 1차 정확도를 의미하는 것으로 C_f^{FO} 항은 이산방정식의 행렬 계수 A_{nb}에 더해진다.

해의 구배

셀 중심에서 해의 구배 $\nabla\phi$를 얻는 방법으로 가우스 적분법(Green-Gauss theorem)과 최소자승법(Least-square method)을 많이 사용한다.

$$\nabla\phi_0 = [\int \nabla\phi_0 d\Omega\,]/\Omega_0 = [\,\sum \phi_f \overrightarrow{A_f}\,]/\,\Omega_0 = [\,\sum_i \frac{\phi_0 + \phi_i}{2}\overrightarrow{A_i}\,]/\,\Omega_0 \quad (6)$$

식 (6)은 가우스법을 이용하여 셀 C_0에서 $\nabla\phi$를 구하는 것으로 셀의 각 면에서 ϕ_f는 이웃하는 두 셀의 산술평균 값을 이용한다. 최소자승법은 이웃하는 두 셀 사이의 변수값의 차이($d\phi$)를 그 변수의 구배로 표현($\overrightarrow{ds}\cdot\nabla\phi$)하고 ϕ_x, ϕ_y 를 이웃하는 두 개 이상의 셀을 이용하여 최소자승으로 구하는 것이다.

$$\phi_x = \frac{\sum(ds_y)^2\cdot\sum ds_x d\phi - \sum ds_x ds_y\cdot\sum ds_y d\phi}{\sum(ds_x)^2\cdot\sum(ds_y)^2 - (\sum ds_x ds_y)^2}$$

$$\phi_y = \frac{\sum(ds_x)^2\cdot\sum ds_y d\phi - \sum ds_x ds_y\cdot\sum ds_x d\phi}{\sum(ds_x)^2\cdot\sum(ds_y)^2 - (\sum ds_x ds_y)^2} \quad (7)$$

식 (7)의 $\sum$은 한 셀을 중심으로 이웃하는 모든 셀에 대해 그 값을 적분하는 것을 의미한다.
Fig. 1에서 $\vec{A}$와 $\overrightarrow{ds}$의 사이각이 커지는 경우, 즉 셀이 많이 찌그러질수록 최소자승법이 가우스 적분법보다 더 정확하게 해의 구배 $\nabla\phi$를 구해낸다. 본 연구에서는 셀 중심에서의 $\nabla\phi$를 최소자승법으로 구하였다.

점성항

점성항을 이산화하기 위해서는 적분면(셀의 경계면)에서 해의 구배 $\nabla\phi_f$를 알아야한다.

$$\int \mu\,\nabla\phi\cdot\overrightarrow{dA} \approx \sum_f \mu_f\,\nabla\phi_f\cdot\overrightarrow{A_f} = \sum_f D_f \quad (8)$$

셀 면에서 $\nabla\phi_f$를 구하는 방법으로는 크게 두 가지 방법이 사용되고 있다. 첫 째는 셀 중심의 값으로부터 격자점에 ϕ를 내삽하여 얻으면 한 셀 면에서 $\overrightarrow{ds}$ 방향과 $\overrightarrow{de}$ 방향으로 해의 변화를 읽을 수 있으며 국소좌표 변환을 통하여 해의 구배 $\nabla\phi_f$를 얻을 수 있다. 그러나 3차원에서 한 면은 삼격형 이상의 다각면이며 여기서 2 개만의 방향 벡터를 설정하기가 어려우며 또한 격자점에서 해를 내삽하는데도 많은 문제점을 안고있다. 두 번째 방법은 $\overrightarrow{ds}$ 방뱡의 $\delta\phi$는 사용하고 $\nabla\phi_f$의 나머지 성분은 두 셀 중심에서 구한 $\nabla\phi$를 거리 가중평균하여 사용하는 것이다.

$$\nabla\phi_f = (\phi_1 - \phi_0)\frac{\vec{A}}{\overrightarrow{ds}\cdot\vec{A}} + [\,\widetilde{\nabla\phi_f} - (\widetilde{\nabla\phi_f}\cdot\overrightarrow{ds})\frac{\vec{A}}{\overrightarrow{ds}\cdot\vec{A}}\,] \quad (9)$$

$$\widetilde{\nabla\phi_f} = w_f\,\nabla\phi_0 + (1 - w_f)\,\nabla\phi_1 \quad (10)$$

$\vec{A}$와 $\overrightarrow{ds}$의 사이각이 없는 직각격자에서 식 (9)은 식 (10)로 나타내어진다.

$$\nabla\phi_f = \frac{\phi_1 - \phi_0}{ds}\hat{n} + [\,\widetilde{\nabla\phi_f} - (\widetilde{\nabla\phi_f}\cdot\hat{n})\,\hat{n}\,] \quad (11)$$

ϕ로 표현된 식 (9)의 첫 번째 항은 셀 C_0와 C_1이 직접 영향을 주고받는 것을 의미한다. 각 셀 면에서의 점성 플럭스 D_f는 식 (9)를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_f = \mu_f \nabla\phi_f \cdot \overrightarrow{A_f} = (\phi_1 - \phi_0)\frac{\mu_f A_f}{\overrightarrow{ds}\cdot\hat{n}} + \mu_f[\widetilde{\nabla\phi_f}\cdot\overrightarrow{A_f} - (\widetilde{\nabla\phi_f}\cdot\overrightarrow{ds})\frac{A_f}{\overrightarrow{ds}\cdot\hat{n}}] \quad (12)$$

비정상항

비정상항을 이산화하는 방법으로, 1차 시간정확도를 갖는 Euler **후방차분법, 2차 정확도의** Crank-Nicholson**법 그리고** MAC, Fractional-Step**법 등에서 사용되는 양해법인** Euler **전방차분법 등이 있다. 본 연구에서는 큰 시간간격에서도 안정적인 2차의** Euler **후방차분법을 이용하였다.**

$$\int \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\Omega = \frac{\rho\Omega}{2\Delta t}(3\phi^{n+1} - 4\phi^n + \phi^{n-1}) \quad (13)$$

여기서 우변의 첫째 항은 내재적으로 처리하고 나머지 두 항은 원천항에 첨가한다.

셀면의 속도(Cell-face velocity)

압력과 속도 성분을 모두 셀 중심에 저장하는 비엇갈림 격자법을 이용하는 경우 셀면에서의 속도를 이웃하는 두 셀의 속도를 선형내삽하면 압력과 속도장의 분리 혹은 서양장기판 형상의 해를 얻게 된다. Rhie, Chow **등은 이산화된 운동량 방정식으로부터 셀 면의 속도를 구함으로서 그런 현상을 막을 수 있었다. 그리고** Majumdar[8]**는 하향이완계수를 고려하여** Rhie-Chow**법을 개선하였다. 자연대류와 같이 체력이 크고 유동의 큰 힘으로 작용하는 경우** Rhie-Chow**법은 해를 불안정하게 만들 수 있으며 이를 보완하기 위해 체력을 고려한 수정된** Rhie-Chow**법**[7]**을 사용하였다. 먼저 이산화된 운동량방정식은 식** (14)**로 표현되며,**

$$u_0 = H_0^u + \alpha(\frac{\Omega}{A_p^u})_0[-(\frac{dp}{dx})_0 - \beta\rho_{ref}(T_0 - T_{ref})g_x] + (1-\alpha)u_0^{l-1} \quad (14)$$

여기서, $H_0^u = \frac{\alpha}{A_{p0}^u}[-\sum A_{nb}u_{nb} + S_0^{u*}]$ **이다.**

원천항 S_0^{u*}**은 압력구배항, 부력항, 하향이완계수에 의한 전단계 값을 제외한 모든 수치적 및 물리적으로 발생하는 원천을 포함한다. 셀** C_0**와** C_1**을 중심으로 이산화한 식을 내삽하여 셀 면에서의 식을 유도 할 수 있다.**

$$u_f = w_f H_0^u + (w_f - 1)H_1^u + \alpha(\frac{\Omega}{A_p^u})_f[-(\frac{dp}{dx})_f - \beta\rho_{ref}(T_f - T_{ref})g_x] + (1-\alpha)u_f^{l-1} \quad (15)$$

여기서 $(\frac{\Omega}{A_p^u})_f = \frac{1}{2}[(\frac{\Omega}{A_p^u})_0 + (\frac{\Omega}{A_p^u})_1]$ **를 사용한다.**

$(\frac{dp}{dx})_f$**는 식** (9)**를 이용해서 구하고, 셀 면에서의 온도** T_f**는 다음과 같은 2차 정확도의 내삽법으로 구한다.**

$$\phi_f = \frac{1}{2}[(\phi_0 + \nabla\phi_0\cdot\overrightarrow{dr_0}) + (\phi_1 + \nabla\phi_1\cdot\overrightarrow{dr_1})] \quad (16)$$

v-**속도성분에 대해서도 식** (15)**와 같이 유도하여 셀면의 면적벡터를 내적하면 셀면에서의 질량유량을 얻을 수 있다.**

압력수정 방정식

밀도가 일정한 비압축성 유동에서 압력장을 푸는 방법에는 여러 가지가 있으나 여기서는 SIMPLEC**에 기반을 둔 압력수정 방정식을 사용하였다. 비정렬격자에서 이산화된** u-**운동량 방정식은 다음과 같은 이산방정식의 형태가 된다.**

$$Ap_0^u u_0 + \sum A_{nb} u_{nb} = S_0^u - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\Omega\right)_0 \tag{17}$$

식 (17)를 풀기 위해서는 정확한 압력을 알고 있어야하나, 가정된 압력 혹은 전단계의 압력을 사용하면 다음 식을 만족하는 u-속도 성분을 얻게 된다.

$$Ap_0^u u_0^* + \sum A_{nb} u_{nb}^* = S_0^u - \left(\frac{\partial p^*}{\partial x}\Omega\right)_0 \tag{18}$$

식 (17)에서 (18)을 빼면 보정속도 u'에 관한 식이 나온다. 그리고 $u'_0 = u'_{nb}$ 라는 SIMPLEC의 가정을 도입하여 정리하면 다음과 같은 속도수정 방정식을 얻을 수 이다.

$$u'_0 = \frac{\Omega_0}{Ap_0^u + \sum A_{nb}}\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_0 = d_0^u\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_0 \tag{19}$$

$$v'_0 = \frac{\Omega_0}{Ap_0^v + \sum A_{nb}}\left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right)_0 = d_0^v\left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right)_0$$

식 (19)는 셀 C_0에 관한 속도 수정식이며, 셀 면에서의 수정속도는 이웃하는 두 셀의 값을 평균해서 얻을 수 있다. 연속방정식을 셀 면에서의 수정 질량유량을 이용해 표현하면 식 (20)이 된다.

$$\sum J_f = \sum J_f^* + \sum J'_f = 0. \tag{20}$$

$$J'_f = \rho_f(u'_f A_x + v'_f A_y) = \rho_f\left[d_f^u\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right)_f A_x + d_f^v\left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right)_f A_y\right] \tag{21}$$

식 (21)은 셀 면에서 $\nabla p'$을 필요로 하며 식 (9)를 이용하여 구할 수 있다. 그러나 압력수정방정식을 풀기 전에는 p'을 알 수 없기 때문에 반복계산을 하지 않으면 $\nabla p'$을 얻을 수 없다. SIMPLEC와 같은 반복 계산법에서는 p'은 아주 작은 값이며 최종적으로 소거되는 값이므로 식 (9)의 두 번째 항을 무시할 수 있다.

$$\nabla p'_f \approx (p'_1 - p'_0)\frac{\hat{n}}{\vec{ds}\cdot\hat{n}}$$

$$J'_f = \rho_f\left[df\frac{n_x}{\vec{ds}\cdot\hat{n}}A_x + df\frac{n_y}{\vec{ds}\cdot\hat{n}}A_y\right](\phi_1 - \phi_0) \tag{22}$$

격자의 찌그러짐이 매우 심한 경우 $\nabla p'$ 항을 고려함으로써 좀 더 안정된 해를 얻을 수 있으나 일반적인 경우에는 거의 영향을 받지 않는다. 식 (20)에 식 (22)를 대입하면 p'에 대한 이산방정식을 얻을 수 있다.

2.3 자료구조 및 선형방정식의 해법

비정렬격자에서 지배방정식을 이산화하기 위해서는 격자의 연결정보를 필요로 한다. 이 격자연결자료는 많은 형태로 구현될 수 있으나 수치자료를 효율적으로 이용할 수 있고 메모리를 줄이는 방법을 사용하여야 한다. 셀 중심의 유한체적법에서는 면을 기준으로하는 격자연결자료가 많이 사용되고 있다. 이것은 각각의 검사면을 따라 이웃하는 두 셀의 번호, 혹은 그 면을 만드는 꼭지점의 번호를 저장한다. 검사면의 면적벡터 등 기하학적인 자료를 이 면기준 격자연결자료와 함께 사용하여 수치 플럭스를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 격자점에 수치값을 내삽하지 않기 때문에 face-cell 연결자료만을 사용하여 플럭스의 계산을 함으로써 메모리 사용에서 매우 효율적이다.

운동량 방정식 및 압력수정 방정식을 이산화하면 다음과 같은 형태의 선형방정식이 만들어진다.

$$a_i\phi_i + \sum_j^{nb} a_j\phi_j = b_i \tag{23}$$

불규칙적이고 성긴 행렬식을 푸는 방법 중에서 CG 계열의 반복법은 수렴속도가 뛰어나서 최근에

많이 사용되고 있다. 특히 비정렬격자에서는 TDMA등과 같은 선이완 기법을 사용할 수 없고 행렬 [A]의 요소를 모두 저장하여야 하기 때문에 CG계열의 반복법은 더욱 요구되어진다.

상류차분법으로 이산화된 운동량방정식의 행렬은 비대칭이므로 CGS, Bi-CGSTAB, 혹은 GMRES 등을 사용할 수 있으나 수렴안정성과 메모리 사용량을 고려하여 Bi-CGSTAB을 선택하였다. 그리고 Bi-CGSTAB은 CGS와 거의 같은 수렴속도를 가지면서 CGS의 불규칙적인 수렴양상을 막을 수 있다. CG 계열 수렴성은 계수행렬의 스펙트럼에 크게 영향을 받으며 행렬의 상태를 개선하기 위하여 preconditioner를 사용한다. 좋은 preconditioner를 사용함으로써 수렴성을 개선할 수 있기 때문에 이에 대한 많은 연구가 되어왔다. Jacobi, SOR, ILU 등이 대표적으로 사용되고 있으며 그 외 일반적으로 사용되는 행렬 계산법도 CG 계열의 preconditioner로 사용될 수 있다. 본 연구에서는 SGS와 LU-SGS를 preconditioner 사용하였다.

2.4 경계조건

본 연구는 밀폐된 공간에서의 자연대류 현상을 대상으로 하며 경계에는 크게 벽과 두 유체층 사이의 경계면, 그리고 대칭축 등으로 이루어져 있다. 각각의 이산방정식에 대해 종속변수는 경계에서 경계조건에 따라 정의된다.

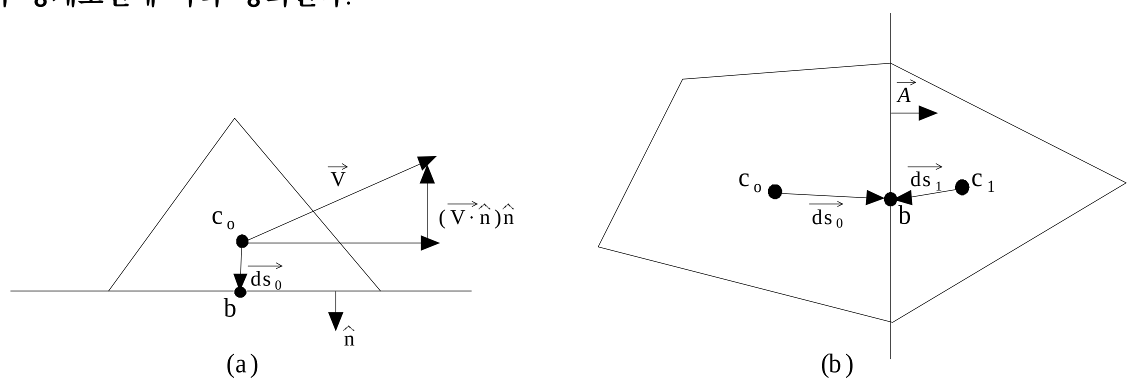


Fig. 2 Control volumes adjacent to a boundary face, (a) for boundary and (b) for interface.

운동량방정식

벽에서는 점착조건에 의해 대류 플럭스는 존재하지 않으며, 벽면에서의 전단력은 벽에 이웃한 셀에서의 속도를 이용하여 구할 수 있다.

$$\tau_w A_w = -\mu_w \left(\frac{du}{dn}\right)_w A_w = -\mu_w \frac{A_w}{\vec{ds_0}\cdot\hat{n}}\left[\vec{V} - (\vec{V}\cdot\hat{n})\hat{n} - \vec{V_b}\right]$$
$$= \left[-h_0 u_0 + h_0(V_n n_x + u_b)\right]\hat{i} + \left[-h_0 v_0 + h_0(V_n n_y + v_b)\right]\hat{j} \quad (24)$$

h_0는 점성계수와 기하학적계수를 곱한 값이며 u_0, v_0 로 표현되는 항은 A_p에 더하고 나머지 항들은 원천항에 더함으로써 이산방정식의 행렬 값을 개선하여 좀더 안정적으로 해를 구할 수 있다. 층간경계 즉 인터페이스에서는 두 개의 이웃하는 셀에 의해서 속도값이나 전단력이 결정된다. 일반적으로 직각격자에서 인터페이스가 x-축에 평행한 경우 경계조건은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1, \quad v_b = 0 \quad (25)$$

경계밀착 격자(비직교 격자)나 본 연구에서 사용한 비정렬 격자에서는 인터페이스에서 두 셀 중심을 잇는 벡터가 엔터페이스와 직교하지 않기 때문에 위와 같은 단순한 1차원적인 식을 사용할 수 없다. 벽면에서 전단력을 구하는 식을 활용하면 인터페이스를 기준으로 왼쪽 셀에서 구한 전단력이 오른쪽 셀에서 구한 전단력과 크기가 같게 놓을 수 있다. 위 식을 수정하여 왼쪽 셀에서

의 전단력을 x-운동량방정식의 성분만 표현하면 다음과 같다.

$$F_{x0} = h_0(u_b - u_0) + h_0 V_{n0} n_x \quad , \; h_0 = \mu_0 \frac{A}{\overrightarrow{ds_0} \cdot \hat{n}} \tag{26}$$

마찬가지로 오른쪽 셀에 대하여 x-방향 전단력을 나타내면,

$$F_{x1} = h_1(u_b - u_1) + h_1 V_{n1} n_x \quad , \; h_1 = -\mu_1 \frac{A}{\overrightarrow{ds_1} \cdot \hat{n}} \tag{27}$$

한 면에서 전단력은 서로 반대 방향이므로 $F_{x0} = -F_{x1}$ 으로 두고 정리하면 u_b와 F_x를 얻을 수 있다.

$$F_x = \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1}(u_1 - u_0) + \frac{h_1(h_0 V_{n0} n_x) - h_0(h_1 V_{n1} n_x)}{h_0 + h_1} \tag{28}$$

$$u_b = \frac{h_0 u_0 + h_1 u_1}{h_0 + h_1} - \frac{h_0 V_{n0} n_x - h_1 V_{n1} n_x}{h_0 + h_1} \tag{29}$$

인터페이스에서의 전단력을 위 식으로 표현함으로써 인터페이스는 일반적인 내부의 셀 면과 같은 방법으로 처리되며 좌우의 두 셀은 계수에 의해 서로 직접 영향을 받는다.

에너지방정식

벽면에서 온도가 주어졌을 때 열속은 이웃하는 셀에서의 온도구배를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} q_b &= k \frac{A}{\overrightarrow{ds_0} \cdot \hat{n}}(T_b - T_0) + k[\nabla T_0 \cdot \vec{A} - (\nabla T_0 \cdot \overrightarrow{ds_0}) \frac{A}{\overrightarrow{ds_0} \cdot \hat{n}}] \\ &= h_0(T_b - T_0) + S_0 \end{aligned} \tag{30}$$

대류나 복사와 같은 열속 경계조건은 다음과 같이 일반적인 식으로 표현할 수 있다.

$$q_b = C(T_b^*) - D(T_b^*) T_b \tag{31}$$

식 (30)과 (31)을 같게 놓고 정리하면 다음과 같이 벽면에서의 온도와 열속을 구할 수 있다.

$$q_b = -\frac{D h_0}{h_0 + D} T_0 + \frac{C h_0 + S_0 D}{h_0 + D} \tag{32}$$

$$T_b = \frac{h_0}{h_0 + D} T_0 + \frac{C - S_0}{h_0 + D} \tag{33}$$

고체와 유체의 경계 혹은 서로 다른 물질이 만나는 인터페이스에서는 열전도계수와 비열을 정의할 수 없으며 단지 온도가 한가지 값만을 갖고 열속이 보존된다는 조건을 사용해야 한다. 1 차원 및 직각격자에서는 조화평균한 열전도계수가 위의 조건을 만족하지만 일반격자에서는 격자의 비직교에 의한 교차 확산항을 고려해 주어야한다.

$$\begin{aligned} q_{b0} &= k \frac{A}{\overrightarrow{ds_0} \cdot \hat{n}}(T_b - T_0) + k[\nabla T_0 \cdot \vec{A} - (\nabla T_0 \cdot \overrightarrow{ds_0}) \frac{A}{\overrightarrow{ds_0} \cdot \hat{n}}] \\ &= h_0(T_b - T_0) + S_0 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} q_{b1} &= k \frac{A}{\overrightarrow{ds_0} \cdot (-\hat{n})}(T_b - T_1) + k[\nabla T_1 \cdot (-\vec{A}) - (\nabla T_1 \cdot \overrightarrow{ds_1}) \frac{A}{\overrightarrow{ds_1} \cdot (-\hat{n})}] \\ &= h_1(T_b - T_1) + S_1 \end{aligned} \tag{35}$$

q_{b0}는 인터페이스의 왼쪽 셀에서 $\vec{A}$ 방향의 열속이며 q_{b1}은 오른쪽 셀에서 $-\vec{A}$ 방향의 열속이므로 $q_{b0} = -q_{b1}$ 이 된다.

$$h_0(T_b - T_0) + S_0 = h_1(T_1 - T_b) - S_1 \tag{36}$$

위 식을 정리하면 인터페이스에서의 온도를 구할 수 있다.

$$T_b = \frac{h_0 T_0 + h_1 T_1}{h_0 + h_1} - \frac{S_0 + S_1}{h_0 + h_1} \tag{37}$$

$$q_b = \frac{h_0 h_1}{h_0 + h_1}(T_1 - T_0) - \frac{h_0 S_1 - h_1 S_0}{h_0 + h_1} \tag{38}$$

압력경계조건

엇갈림 격자를 사용하는 경우에는 경계에서 압력이 필요치 않으나, 비엇갈림 격자를 사용하면 운동량 방정식에 포함되어 있는 압력구배를 계산하기 위해서 경계에서의 압력이 필요하다. 일반적으로 경계에서의 압력은 인접한 셀의 값을 이용하거나(1차 정확도를 갖는다.) 선형 및 포물형의 외삽을 하기도 한다. 그러나 부력과 같은 체력이 존재하는 경우 1차나 2차의 압력 외삽은 큰 오차를 만들어 낼 수 있다. 특히 비정렬 격자를 사용하면 벽면에서 압력을 선형이상으로 외삽하는 것이 매우 힘들며 비직교 격자에서도 벽면에서 격자의 비직교성이 증가하면 단순한 격자선을 따르는 외삽에 많은 오차를 포함시킬 수 있다. 많은 수치계산을 통해서 체력이 없는 유동에서는 1차 혹은 2차의 선형 압력 외삽만으로 충분하였으나, 체력이 큰 경우에는 벽면에서 압력의 오차로 인하여 부적절한 속도 값을 만들어 내기도 하였다. 본 연구에서는 벽면에 인접한 셀에서 속도의 크기를 무시하고 압력구배를 부력항과 같다고 가정하였다.

$$\nabla p = -\beta\rho_{ref}(T_o - T_{ref})\mathbf{g} \tag{39}$$

벽면에서의 압력은 셀에서의 압력구배를 변위벡터 $\overrightarrow{ds_0}$ 와 내적으로 구할 수 있다.

$$p_b = p_0 + \nabla p \cdot \overrightarrow{ds_0} = p_0 - \beta\rho_{ref}(T_o - T_{ref})\mathbf{g} \cdot \overrightarrow{ds_0} \tag{40}$$

두 유체가 만나는 인터페이스에서도 위의 식을 사용하여 압력을 구하였다.

3. 결과 고찰

3.1 2차원 반원 내에서 열원이 존재하는 성층유동

지름이 0.26m 인 반원 모양의 밀폐된 용기내에 Prandtl 수가 6.7인 물질이 열원을 포함하고 있는 경우에 대하여 수치 해석을 하였다. 유체층의 높이는 상층이 L_1, 하층이 L_2이며 길이 비는 8:18이다. 위의 편편한 벽과 아래의 반원 모양의 벽은 등온 조건을 주었으며 유체층의 인터페이스는 고정되어 있으며 단지 전단력과 열속만이 두 층 사이에 교환된다. 용기내 초기온도는 외벽과 같이 두었으며, 열원에 의해 열이 외벽을 통해 밖으로 빠져나간다. 대표 파라미터는 열원을 기준

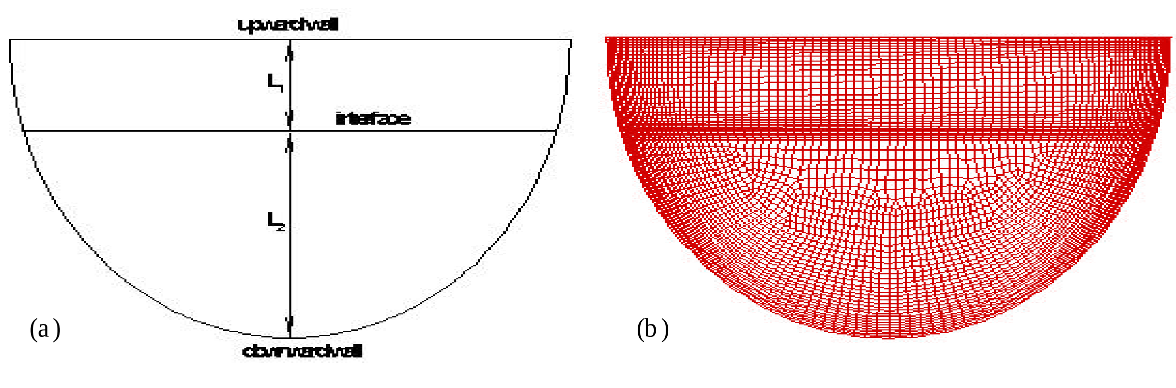


Fig.3 (a) Schematic of the 2-dimensional semicircle for a stratified pool, (b) Unstructured mesh (L_1:L_2 = 8:18), upper layer:2250 cells, lower layer:2696 cells.

으로 무차원한 Rayleigh 수로 다음과 같이 표현된다.

$$Ra = \frac{g\beta\rho^2 C_p Q_v L^5}{\mu k^2} \quad , \quad Ra_d = \frac{g\beta\rho^2 C_p Q_v L_2^5}{\mu k^2} \tag{41}$$

유체의 성층화가 유동 및 열전달에 미치는 특성을 고찰하기 위하여 두 유체층을 같은 물질로 채우고 계산하였다. L에 대한 Rayleigh 수가 1.3×10^8 인 경우에 대하여 단일 유체층으로 이루어진 경우와 2층으로 이루어진 경우를 각각 계산하고 비교하였다.

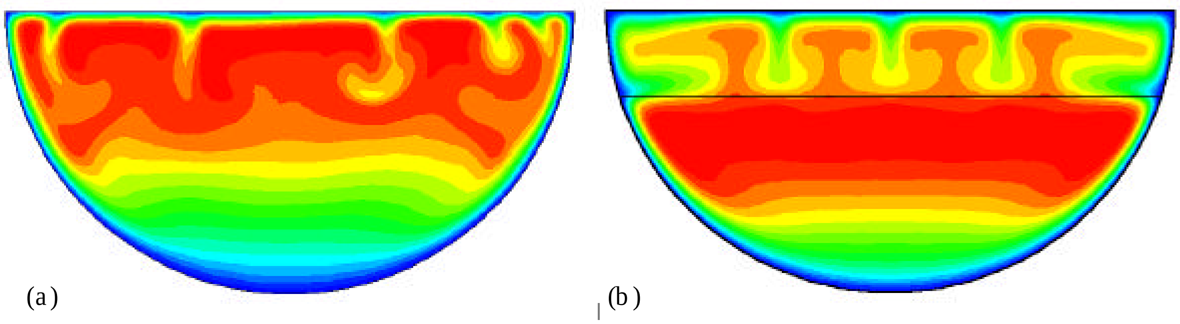


Fig.4 Temperature contours in a pool with heat source, (a)single layer, (b)double layer, $Ra=1.3\times10^8$, $Ra_d=2\times10^7$

Fig.4는 층이 있는 경우와 없는 경우에 대해 온도 분포를 보여주는 것으로 성층화가 열전달에 크게 영향을 미치는 것을 볼 수 있다. 일반적으로 열원을 포함하는 유체가 반구 내에서 자연대류를 할 때, 반구의 제일 아래 부분은 대류효과가 매우 작고 열전도가 지배적은 영역이다. 이 영역에서는 위로 올라가면서 온도가 증가하는 안정된 온도분포를 하고 있다. 반구의 위 부분은 상부 벽에서 식은 유체가 하강하고 중심부의 고온 층과 활발히 열교환을 일으키며 Benard 셀을 형성하기도 한다. 그리고 반구벽을 따라 고온의 유체가 외벽을 통해 열을 발산하면서 얇은 경계층을 만들어 낸다. **Fig**.4(a)를 통해 3 영역으로 나눠어진 것을 짐작할 수 있으나, 유체가 두 개의 층으로 분리되어 있는 경우(**Fig**.4b)에는 가장 고온의 유체층이 층 경계 바로 아래에 위치하고 있음을 보여준다. 위 층에서는 상부벽에서의 냉각으로 인해 Benard 셀이 형성되어 대류에 의한 활발한 열교환이 있음을 알 수 있다. **Fig**.4(b)에서 보는 바와 같이 고온층이 인터페이스 아래에 위치하고 있는 것은 반구 외벽으로의 열부하가 단일층으로 된 풀에서의 열부하와 전혀 다르게 만드는 주요 원인이 된다.

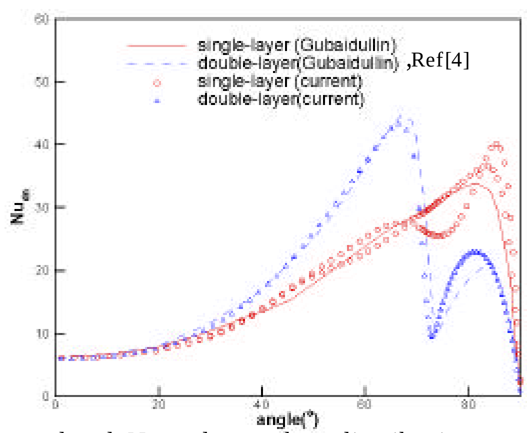


Fig.5 Instantaneous local Nusselt number distribution at the downward wall, $Ra=1.3\times10^8$, $Ra_d=2\times10^7$

Fig.5는 반구의 외벽을 따라 Nusselt 수의 분포를 보여준다. 여기서는 Nusselt 수를 다음과 같이 체적평균 온도를 이용하여 무차원화하였다.

$$Nu = \frac{q_w}{k(T_w - T_{av})/L} \tag{42}$$

두 유체층의 인터페이스가 외벽과 만나는 점은 72.1°이며 최고의 Nusselt 수는 그 점 바로 아래에 위치하고 있다. 단일 층인 경우와 두 개의 층으로 된 경우에 대해 평균 Nusselt 수와 상부와 하부로 전달되는 열량비를 다음의 **Table**.1에 나타내었다.

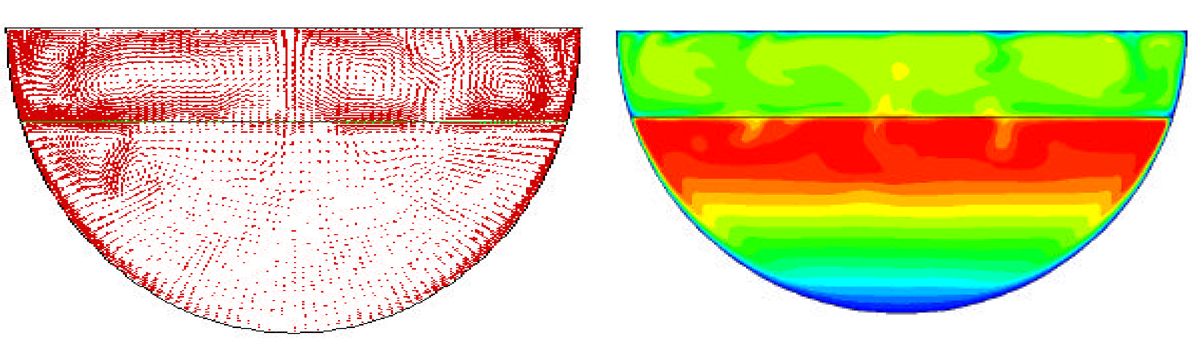
Pool type	Nu_{up}	Nu_{dn}	q_{up}/q_{dn}
Single-layer	30	18	1.06
Double-layer	18	23	0.8

Table.1 Comparison of heat transfer chacteristics between single-layer and double-layer pool

두 유체층으로 된 경우가 단일 유체층으로 된 경우에 비해 상부로의 열속은 감소시키고 하부 반구벽으로 나가는 열속을 증가시키는 것을 알 수 있다. 계산 결과로 볼 때 Rayleigh 수가 1.3×10^8 인 경우에는 성층화가 q_{up}/q_{dn}를 20% 정도 증가시키는 것으로 나타났다.

3.2 두 유체층에서 열원이 존재에 따른 열전달 특성

용기내에서 두 개의 유체층으로 성층화가 된 경우 열원의 존재에 따라 열전달 특성을 비교하였다. Rayleigh 수가 1.3×10^{10} 인 경우에 대하여 상부 유체층에 열원 Q_{v1}이 없는 경우와 Q_{v1}이 하부 유체층의 열원 Q_{v2}와 같은 경우에 대하여 계산을 수행하였다.



(a) (b)

Fig.6 (a) Velocity vectors, (b)Temperature contours in a semicircular stratified pool, $Ra=1.3\times10^{10}$, $Ra_d=2\times10^9$

Fig.6은 Q_{v1}이 Q_{v2}와 같은 경우 어느 한순간에 대한 속도장과 온도장을 보여주고 있다. 높은 Rayleigh 수로 인하여 유동장은 시간에 따라 변하는 비정상상태이며 좌우의 비대칭성을 보여주고 있다. 상부 유체층은 Benard 셀 모양의 유동구조를 보여주고 있으며 인터페이스 바로 아래 부분에서도 불규칙적인 와도현상이 나타난다. 그리고 반구 벽면에 매우 얇은 경계층이 형성되어 있다. 상부 유체층에 열원이 있는 경우 그 열은 위쪽 벽면과 인터페이스 위의 반구벽을 통해 빠져나가게 되며 이는 상부 유체층에 열원이 없는 경우에 비해 더 큰 열부하를 만들어낸다. Q_{v1}이

존재하는 경우가 Q_{v1}가 없는 경우에 비해 인터페이스 전에서 최고 Nusselt 수가 작게 나타나는 것은 Nusselt 수의 정의에서 체적평균 온도를 사용함에 기인한 것으로 생각된다.

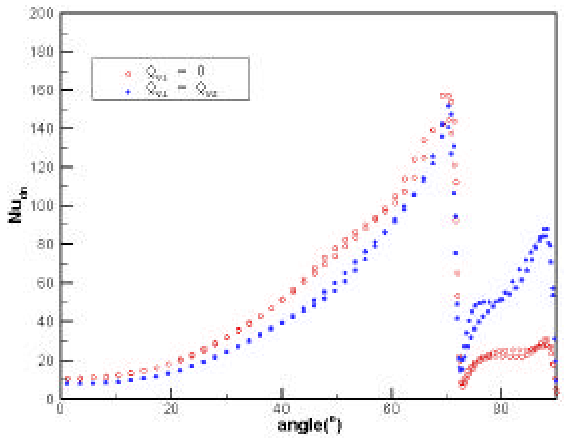


Fig.7 Instantaneous local Nusselt number distribution at the downward wall, $Ra=1.3\times10^{10}$, $Ra_d=2\times10^{9}$

3.3 축대칭 반구 내에서의 성층유동

축대칭 반구형이 용기내에서 유체가 층을 이루고 있을 때 열전달 및 유동 특성을 살펴보았다. **Fig**.8(a)는 사용된 격자이며, (b)는 반구벽에서 Nusselt 수의 분포를 나타낸다. Nusselt 수는 2차원 반원모양의 용기에서와 비슷한 분포를 하고 있으나 같은 Rayleigh 수에서 최대 Nusselt 수는 좀 작게 나타났다.

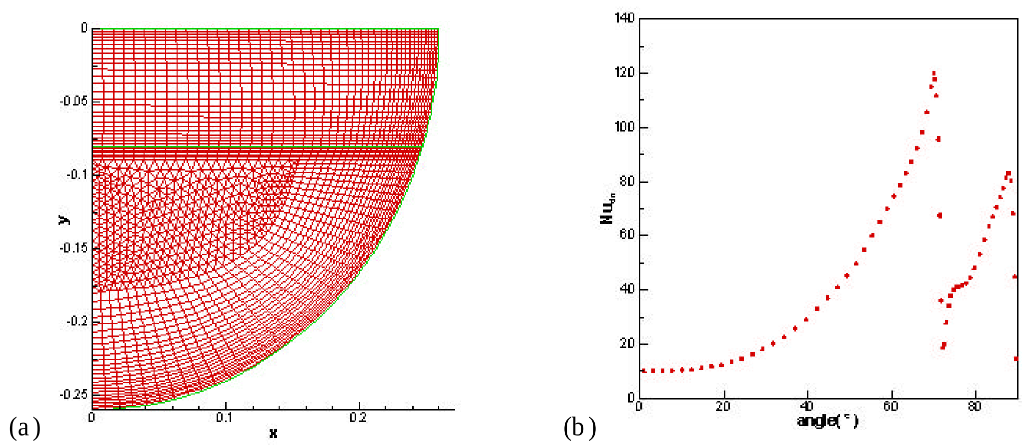


Fig.8 (a) Hybrid mesh used for a axisymmetric stratified pool ($L_1:L_2$ = 8:18),
(b) Instantaneous local Nusselt number distribution at the downward wall, ($Ra=1.3\times10^{10}$, $Ra_d=2\times10^{9}$)

4. 결론

본 연구에서는 열원이 존재하는 성층화된 유동의 열전달 특성을 파악하기 위한 수치모델을 개발하고 반구형 용기내에 두 개의 층으로 나눠어진 풀의 자연대류 해석에 적용하였다.
유체층 사이의 경계를 포함하는 2차원 반구모형내의 성층유동을 계산하기 위하여 비정렬격자 수

치해법을 도입하였으며, 자연대류와 같이 체력이 크며 유동의 큰 힘으로 작용하는 경우 안정된 해를 얻기 위하여 수정된 Rhie-Chow법을 사용하였고, 외벽에서의 압력은 체력을 고려해 외삽함으로써 오차를 줄일 수 있었다.

용기내 단일 층으로 구성된 풀에서는 고온부가 상부벽 바로 아래 위치하며 이로 인해 하부 반구벽의 가장 윗 부분에서 Nusselt 수가 가장 큰 반면, 두 유체층으로 이루어진 경우는 유체의 고온부가 유체층 경계 바로 아래 위치하였으며 국소 Nusselt 수의 최고점도 이 인터페이스 바로 아래 부분에서 발생하였다. 그리고 Rayleigh 수가 1.3×10^8인 경우에는 성층화가 q_{up}/q_{dn}를 20% 정도 증가시키는 것으로 나타났다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 중장기과제에서 재정적 지원을 받았습니다.

참고문헌

[1] Sehgal, B.R., "Melt Stratification Observation from the RASPLAV and TULPAN Tests," presented at the 1st Meeting of the Concerted ction Project on Melt Stratification, Sep.1

[2] Prakash, A. and Koster, J.N., "Steady Natural Convection in a Two-Layer System of Immiscible Liquids," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.40, No.12, pp.2799-2812, 1997

[3] Schramm, R. and Reineke, H.H., "Natural Convection in a Horizontal Layer of Two Different Fluids with Internal Heat Sources," European Applied Research Reports, Nuclear Science Technology Section, Vol.1, No.6, pp.298-305

[4] Gubaidullin Jr., A.A. and Sehgal, B.R., "Natural Convection in a Double-Layer Pool with Internal Heat Generation," ICONE-8591

[5] 김종태, 김태준, 김용모, “비정형격자 압력기준 유동해석기법을 이용한 비압축성 유동해석,” 한국전산유체공학회 추계학술대회 논문집, pp.42-47, 1998

[6] Rhie, C.M. and Chow, W.L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation, " AIAA J. Vol.21, No.11, pp.1525-1532, 1983

[7] Choi, S.K., "Note on the Use of momentum Interpolation Method for Unsteady Flows," Numerical Heat Transfer, Part A, Vol. 36, pp545-550, 1999

[8] Majumdar, S., "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids, "Numerical Heat Transfer, Vol.13, pp.125-132, 1988