2001 춘계학술발표회 논문집
한국원자력학회

해석함수와 다항식을 이용한 노달 전개법

Use of Analytic Functions and Polynomials within the Framework of Nodal Expansion Method

하창주, 임채준, 이창규, 박찬오

한전원자력연료㈜
대전광역시 유성구 덕진동 150

요약

이 연구에서는 1 차원 중성자속 분포를 다항식과 해석함수로 근사하는 준해석적 노달 전개법을 유도하고 정확도를 분석하였다. 이 방법은 노달 전개법과 동일한 횡방향 중성자 누출의 근사를 사용하고 flux moments balance equation을 사용하여 중성자류 연속방정식의 상수를 구하였다. 이 방법에서는 1 차원 중성자속을 2차/3차/4차의 다항식과 해석함수로 표현하고 여기에 몇 종류의 가중함수를 적용하여 각각 방법의 정확도를 비교하였다. 이러한 방법들은 NEM(Nodal Expansion Method)과 동일한 수치 해석적인 방법을 사용하기 때문에 기존 노달 전개법을 근간으로 하고 있는 노달 전산코드에 이식이 용이하며 기억용량의 확장을 최소화 시킬수 있는 장점이 있다. 이 방법론이 이식된 노달 전산코드를 검증하기 위해 IAEA 3D 문제, NEACRP-L336 문제와 EPRI-9R 문제가 이용되었다. 혼합연료의 특성을 반영하는 NEACRP-L336 문제와 노심 외곽의 집합체 특성을 반영하는 EPRI-9R 문제에 대하여 준해석적 노달 전개법이 기존의 노달 전개법보다 노심 반응도와 집합체 출력에 대하여 좋은 결과를 보여주었고 1 차원 중성자속을 3차의 다항식으로 근사하였을 경우 polynomial weighting 보다 step function weighting이 IAEA 3D 문제에 대하여 보다 좋은 결과를 보여주고 있다. 3차의 다항식에 polynomial weighting을 사용한 경우가 4차의 다항식에 Galerkin weighting을 사용한 경우에 비하여 IAEA 3D, NEACRP-L336, EPRI-9R 문제에 보다 좋은 결과를 보여 주었다.

Abstract

A method using one-dimensional flux approximation expressed in terms of polynomials and hyperbolic functions was derived and the accuracy of the method was explored. This method called SANEM(Semi-Analytic Nodal Expansion Method) employs the same transverse leakage approximation used in NEM(Nodal Expansion Method) and flux moment balance equations to find coupling coefficients in current continuity equation. A one-dimensional flux approximation is expressed in the second order/the third order/the fourth order polynomials combined with hyperbolic functions for which several weighting functions are applied and the accuracy of methods were compared. This method has advantages of minimizing memory increase and easy implementation to a nodal code based on the conventional NEM. Benchmark calculations for the code were performed using problems such as IAEA 3D problem, NEACRP-L336 problem and EPRI-9R problem. Results show that both reactivity and assembly power density prediction by the SANEM

is better than NEM for NEACRP-L336 problem, which uses MOX fuel, EPRI-9R problem, which shows characteristics of assembly in core periphery. A step function weighting applied to the third order polynomial expansion of a one-dimensional flux approximation produced better results than the polynomial weighting applied to the third order polynomial expansion for IAEA 3D problem. Furthermore, Galerkin weighting applied to the fourth order polynomial expansion shows worse results than polynomial weighting applied to the third order polynomial expansion for IAEA 3D, NEACRP-L336 and EPRI-9R problems.

1. 서론

원자로심 해석용으로 사용하고 있는 노달 전개법[1]은 1 차원 중성자 확산 방정식을 만족하는 중성자속을 4차의 다항식으로 전개하고 있다. 이러한 다항식 전개법은 경수로형 원자로심 해석코드에 사용되어 유효증배계수, 노심출력분포등을 잘 예측하고 있다. 하지만 중성자속의 변화가 큰 영역에서 노달 전개법은 ANM[2], AFEN[3]등에 비해 출력분포 및 노심반응도에 대한 계산오차가 큰편이다. 이러한 점을 보완하기 위해 제시된 방법인 준해석적 노달 전개법[4]은 1 차원 중성자속을 다항식과 해석함수로 전개하여 중성자속의 변화가 큰 영역에서 출력분포를 잘 예측할수 있도록 하였다.

이 연구에서는 1 차원 중성자속을 2차/3차/4차의 다항식과 해석함수로 전개한후 노달 전개법과 동일한 횡방향 중성자속 근사와 flux moments weighting을 사용하여 기존의 노달 전개법을 사용하고 있는 전산코드의 수정을 최소화할 수 있도록 하였고, 다항식의 차수와 가중함수가 노심반응도 및 출력분포의 정확도에 미치는 영향을 알아보았다.

2. 해석함수의 적용

준해석적 노달 전개법은 1 차원 중성자속의 해를 4 차 항의 다항식으로 표현하는 노달 전개법과는 달리 1 차원 중성자 확산 방정식을 만족하는 2 차, 3 차 또는 4 차의 다항식과 sinh 함수와 cosh 함수로 구성된 1 차원 중성자속 해를 이용하여 1 차원 중성자 확산방정식을 푼다.

$$-D_g^n\left(\frac{2}{h}\right)^2\frac{d^2}{du^2}f_{gu}^m(u)+\Sigma_g^{r,m}f_{gu}^m(u)=\sum_{g'=1}^{G}\left\{\frac{c_g}{k}n\Sigma_{g'}^{f,m}+\Sigma_{\substack{g'\to g\\ g'\neq g}}^{s,m}\right\}f_{g'u}^m(u)-L_{gu}^m(u) \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} f_{gu}^m(u) &= a_{0gu}^m+a_{1gu}^m w_1(u)+a_{2gu}^m w_2(u)+a_{3gu}^m w_3(u)+a_{4gu}^m w_4(u) \\ &\quad + A_{gu}^m\cosh k_{gu}^m u+B_{gu}^m\sinh k_{gu}^m u \end{aligned} \qquad (2)$$

식 (2)에서 사용된 함수들은 아래와 같이 정의된다.

$$k_{gu}^m=\frac{h}{2}\sqrt{\frac{\Sigma_g^{r,m}}{D_g^m}},\qquad -\frac{h}{2}\le x\le\frac{h}{2},\qquad u=\frac{2x}{h}$$

$$w_1(u)=u,\ w_2(u)=-\frac{1}{2}\left(3u^2-1\right),\ w_3(u)=-\frac{3}{2}u(u^2-1)$$

$$w_4(u)=-\frac{3}{8}(u^2-1)(5u^2-1),\qquad -1\le u\le +1,$$

여기서는 편의상 2 차 다항식으로 전개된 1 차원 중성자속 근사를 이용한다. 1 차원 중성자 확산 방정식에 있는 횡방향 중성자 누출은 2 차 다항식으로 근사되며 부분 중성자류를 구하기

위해 노달 전개법과 동일한 조건들을 이용하였다.

- 평균 중성자속 :

$$f_g^m = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_{gu}^m(u)du = a_{0gu}^m + A_{gu}^m \frac{SH_{gu}^m}{k_{gu}^m}$$

- 표면 중성자속 :

$$f_{gur}^m = a_{0gu}^m + a_{1gu}^m - a_{2gu}^m + A_{gu}^m CH_{gu}^m + B_{gu}^m SH_{gu}^m \quad \text{at } u = +1.0 \qquad (3\text{-}1)$$

$$f_{gul}^m = a_{0gu}^m - a_{1gu}^m - a_{2gu}^m + A_{gu}^m CH_{gu}^m - B_{gu}^m SH_{gu}^m \quad \text{at } u = -1.0 \qquad (3\text{-}2)$$

여기서, $SH_{gu}^m \equiv \sinh k_{gu}^m$, $CH_{gu}^m \equiv \cosh k_{gu}^m$ 을 나타낸다.

- The first flux moment equation : $\int_{-1}^{1}\{w_1(u)\times(\text{식 }1)\}du$ (4-1)

- The second flux moment equation : $\int_{-1}^{1}\{w_2(u)\times(\text{식 }1)\}du$ (4-2)

- Current continuity : 부분 중성자류는 Fick's law 로부터 구한다.

$$J_{gur}^{m+} = -C_{1gu}^m a_{1gu}^m + C_{2gu}^m a_{2gu}^m + C_{3gu}^m f_g^m + C_{4gu}^m J_{gur}^{m-} - C_{5gu}^m J_{gul}^{m-} \qquad (5\text{-}1)$$

$$J_{gul}^{m+} = C_{1gu}^m a_{1gu}^m + C_{2gu}^m a_{2gu}^m + C_{3gu}^m f_g^m - C_{5gu}^m J_{gur}^{m-} + C_{4gu}^m J_{gul}^{m-} \qquad (5\text{-}2)$$

식 (5-1)과 식(5-2)에 있는 상수들은 아래와 같이 표현된다

$$b_{1gu}^m \equiv k_{gu}^m \frac{CH_{gu}^m}{SH_{gu}^m}, \quad b_{2gu}^m \equiv \left(k_{gu}^m\right)^2 \frac{SH_{gu}^m}{T_{2gu}^m}, \quad D_{gh}^m \equiv \frac{D_g^m}{h}, \quad T_{2gu}^m \equiv k_{gu}^m CH_{gu}^m - SH_{gu}^m,$$

$$C_{1gu}^m = \frac{2D_{gh}^m(1-b_{1gu}^m)}{1+4D_{gh}^m b_{1gu}^m}, \quad C_{1gu}^m = \frac{2D_{gh}^m(3-b_{1gu}^m)}{1+4D_{gh}^m b_{1gu}^m}, \quad C_{3gu}^m = \frac{2D_{gh}^m b_{2gu}^m}{1+4D_{gh}^m b_{2gu}^m},$$

$$C_{4gu}^m = \frac{1-16(D_{gh}^m)^2 b_{1gu}^m b_{2gu}^m}{(1+4D_{gh}^m b_{1gu}^m)(1+4D_{gh}^m b_{2gu}^m)}, \qquad C_{5gu}^m = \frac{4D_{gh}^m(b_{2gu}^m - b_{1gu}^m)}{(1+4D_{gh}^m b_{1gu}^m)(1+4D_{gh}^m b_{2gu}^m)}$$

그러나 1 차원 중성자속을 3 차/4 차의 다항식과 해석함수로 근사하였을 경우에는 식 (4-1)과 식 (4-2)과 함께 또 다른 가중함수를 선택하여 새로운 flux moment equation 을 구하였다. 3 차 다항식을 사용했을 경우 가중함수는 $w_3(u)$, 또는 $\begin{cases} w_3 = -1, u \le 0 \\ w_3 = +1, 0 \le u \end{cases}$ 와 같은 step function 를 선택하였고, 4 차 다항식을 사용하였을 경우 $w_3(u)$ 와 $w_4(u)$ 를 사용하였다. 이상과 같이 몇가지 가중함수를 이용하여 유도된 flux moment equation 과 current continuity 를 이용하여 유도된 상수를 노달 코드에 적용하여 검증계산을 수행하였다. 표 1 은 검증계산에 적용된 다항식의 차수와 가중함수를 보여주고 있다.

3. 검증계산

3.1 IAEA 3D 문제

IAEA 3D 모델[5]은 1/4 노심으로 노심내부는 축선상의 집합체의 중심에서 반사 경계조건을, 노심외곽은 진공 경계 조건을 적용하였다. 미세 격자 유한차분법을 사용한 VENTURE 계산 결과를 기준치로 사용하였다. 표 2 는 노달 전개법과 case 1 에서 case 4 의 방법을 사용하여 1 node/ 1 assembly에 대한 계산결과를 보여주고 있다. 유효증배계수는 11 pcm 이내로 예측하나 집합체 출력은 case 4의 경우 최대오차 3.36%를 보여주고 있다. 일반적으로 준해석적 노달 전개법은 노심외곽의 집합체에서 높은 출력오차를 보여주고 있으며 이러한 경향은 참고 문헌 [4]의 IAEA 2D 문제 결과와 비슷한 경향을 보여주고 있다. 출력분포의 RMS(Root Mean Square) 오차는 case 1, case 2의 경우 기존의 노달 전개법과 비슷하나 case 4의 경우 큰 오차를 보여주고 있는데 이는 Galerkin weighting으로 인한 영향으로 생각된다. Step function을 적용한 case 2의 경우는 노달 전개법보다 좋은 출력분포를 보여주고 있다. 한편 4개의 노드로 계산했을 경우 각 방법론 별로 유사한 결과를 보여주었다.

3.2 NEACRP-L336 C5 문제

NEACRP-L336 C5 모델[6]은 우라늄과 플루토늄을 혼합한 MOX 연료를 사용하는 벤치마크 문제로 UO_2와는 다른 핵적 특성을 보인다. 기준계산 결과는 ANM을 사용하는 PARCS[7]코드로부터 얻었다. 기준계산에는 한 개의 집합체를 36개의 노드로 분할하고 노심외곽의 경계에서는 진공경계조건을 사용하였다. 계산은 집합체 1개를 노드 1개로 하여 수행되었다. 각각의 방법론에 따른 유효증배계수와 집합체 출력의 오차는 표3에 보여주고 있다. 준해석적 노달 전개법이 혼합 연료 집합체에서의 유효증배계수 및 집합체 출력을 상대적으로 잘 예측하고 있음을 볼 수 있다. 특히 같은 3차의 다항식을 쓰는 경우를 비교하면 polynomial weighting을 사용하는 case 3이 step function weighting을 사용하는 case 2 보다 좋은 결과를 보여주고 있음을 볼수 있다. Galerkin weighting을 사용한 Case 4(4차 다항식)는 다항식의 차수가 증가했음에도 case 3(3차 다항식)보다 좋은 결과를 보여주지 못하고 있다.

3.3 EPRI-9R 문제

EPRI-9R 모델[8]은 LWR의 노심외곽의 반사체와 인접하는 부분을 검증하는 전형적인 벤치마크 문제이다. EPRI-9R 벤치마크 문제에 사용된 핵연료 집합체의 한 변의 길이는 21.0cm 이고 동일한 크기의 반사체가 노심외곽에 있는 2 차원 문제이다. 노심의 경계조건은 노심의 대칭축선상의 집합체면에서는 반사 경계조건을, 노심의 외곽에서는 진공경계 조건을 사용하였다. 기준 계산은 노달전개법/노달적분법[9]을 이용하여 집합체 한 개당 36 노드로 나누었다. 표 4는 유효증배계수 및 집합체 출력의 오차를 보여주고 있다. 기준 계산결과와 비교하여 노달 전개법보다 준해석적 노달 전개법이 개선된 결과를 보여주고 있는 것을 볼 수 있다. 표 4를 보면 polynomial weighting을 사용한 case 3이 가장 좋은 결과를 보여주고 있음을 알수 있다.

4. 결론

1차원 중성자속 확산방정식을 만족하는 1차원 중성자속 근사해를 2차, 3차 또는 4차의 다항식과 해석함수인 sinh 함수 cosh 함수로 표현하고 기존의 노달 전개법에 적용되는 가중함수를 이용하는 준해석적 노달 전개법을 이용하여 이를 IAEA 3D 문제, 혼합연료를 사용하는 NEACRP-L336 문제, L자형 노심외곽의 핵적특성을 보여주는 EPRI-9R 문제에 적용하여보았다. 2차의 다항식에 moment weighting을 사용한 case 1의 경우는 기존의 노달 전개법에 비해 NEACRP-L336과 EPRI-9R 문제에서 좋은 결과를 보여주고 있고 IAEA 3D 문제에서는 비슷한 결과를 보여주고 있다. 3 차의 다항식에 step function weighting을 적용한 case 2의 경우는 노달 전개법에 비해 IAEA 3D 문제에서 좋은 결과를 보여주고 있다.

경수로형 원자로심의 특성을 보여주는 IAEA 3D 문제의 경우 polynomial weighting을 사용하는 case 3(3차 다항식), Galerkin weighting을 사용하는 case 4(4차 다항식)의 경우 노심반응도 및 집합체 출력분포 오차가 노달 전개법과 비교하여 크게 나타나고 있으며 이러한 경향은 참고 문헌 [1]에서 확인할수 있다. 하지만 준해석적 노달 전개법을 사용한 case 1 ~ case 4는 혼합 연료를 사용하는 NEACRP-L336 문제와 EPRI-9R 문제의 경우에 노달 전개법보다 좋은 결과를 보여주고 있다. 3 차의 다항식에 polynomial weighting을 쓴 case 3의 경우 case 1, case 2, case 4

보다 NEACRP-L336 문제와 EPRI-9R 문제에서 더 좋은 결과를 보여주고 있다.

따라서 중성자속의 변화가 큰 노심 모델에 대해서는 기존의 노달 전개법보다 준해석적 노달 전개법이 좋은 결과를 보여주고 있고, 또한 4 차의 다항식에 Galerkin weighting을 적용하는 것 보다 3차의 다항식에 polynomial weighting을 사용한 경우가 보다 나은 결과를 보여 주었다.

감사의 글

이 연구는 과학기술부의 원자력 중장기 계획사업의 일환으로 수행되었습니다.

참고문헌

1. H. Finnemann, F. Bennewitz, M. R. Wagner, "Interface Current Techniques for Multidimensional Reactor Calculation," Atomkernenergie 30,p.123,(1977).
2. K. S. Smith, "An Analytical Nodal Method for Solving the Two-Group, Multidimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equation, Engineers Thesis, MIT (1979).
3. J. M. Noh, "Analytic Function Expansion Nodal Method for Nuclear Reactor Core Design," Ph.D. Thesis, KAIST (1995).
4. Y. I. Kim et al., "A Semi-Analytic Multigroup Nodal Method," Annals of Nuclear Energy,26,p.699 (1999).
5. Argonne Code Center, Benchmark Problem Book, ANL-7416, September,1976.
6. J. C. Lefbvre, J. Mondot and J. P. West, "Benchmark Calculations of Power Distribution within Assemblies," NEACRP-L336, OECD (1991).
7. H. G. Joo et al., "A Multi-dimensional Two-Group Reactor Kinetics Code Based on the Nonlinear Analytic Nodal Method," PU/NE-97-4 (1997).
8. H. S. Khalil, " The Application of Nodal Methods to PWR Analysis," Ph.D. Thesis, MIT (1983).
9. H.D.Fischer, H.Finnemann, "The Nodal Integration Method – A Diverse Solver for Neutron Diffusion Problems," Atomkernenergie 39, p.229 (1981).

표 1. 1 차원 중성자속의 근사해에 사용되어진 다항식의 차수와 가중 함수

	1 차원 중성자속 근사해	가중함수
Case 1	2 차 다항식 + 해석함수	$w_1(u)$, $w_2(u)$
Case 2	3 차 다항식 + 해석함수	$w_1(u)$, $w_2(u)$, step function
Case 3	3 차 다항식 + 해석함수	$w_1(u)$, $w_2(u)$, $w_3(u)$
Case 4	4 차 다항식 + 해석함수	$w_1(u)$, $w_2(u)$, $w_3(u)$, $w_4(u)$

표 2. IAEA 3D 문제의 출력분포 및 유효증배계수 비교

집합체 출력분포 (1 node)

0.7290 0.22 -0.25 0.14 -0.60 -0.80	1.2810 0.37 -0.66 -0.14 -1.02 -1.52	1.4220 0.56 -0.35 0.17 -0.70 -1.07	1.1930 0.29 -0.55 -0.13 -0.84 -1.25	0.6100 0.02 0.02 0.15 -0.13 -0.11	0.9530 -0.09 -0.30 -0.24 -0.30 -0.46	0.9590 -0.41 0.03 -0.21 0.21 0.31	0.7770 -0.93 0.00 -0.45 0.39 1.26
	1.3970 0.46 -0.43 0.06 -0.79 -1.23	1.4320 0.33 -0.47 -0.02 -0.80 -1.19	1.2910 0.33 -0.35 0.03 -0.62 -0.98	1.0720 0.04 -0.51 -0.26 -0.66 -0.96	1.0550 -0.08 -0.16 -0.11 -0.16 -0.25	0.9760 -0.59 -0.06 -0.36 0.14 0.28	0.7570 -1.16 0.13 -0.57 0.61 1.40
		1.3680 0.26 -0.42 -0.02 -0.72 -1.05	1.3110 0.28 -0.30 0.03 -0.53 -0.83	1.1810 0.25 -0.15 0.08 -0.29 -0.47	1.0890 -0.15 -0.09 -0.12 -0.06 -0.07	1.0000 -0.92 -0.28 -0.65 -0.03 0.28	0.7110 -0.48 1.08 0.32 1.60 2.87
			1.1780 0.31 -0.16 0.09 -0.34 -0.62	0.9720 -0.04 -0.39 -0.25 -0.44 -0.68	0.9230 -0.27 0.20 -0.10 0.37 0.29	0.8660 -0.43 0.80 0.15 1.21 1.84	
				0.4760 -0.29 0.23 0.06 0.34 0.53	0.7000 -0.93 -0.06 -0.69 0.31 0.34	0.6110 -0.03 1.57 0.77 2.13 3.36	
					0.5970 -0.02 1.62 0.77 2.21 3.25		

기준값	기준 출력
NEM	% error
Case 1	% error
Case 2	% error
Case 3	% error
Case 4	% error

유효증배계수 및 집합체 출력 오차

	1node/4nodes pcm	1node/4nodes Power max. error(%)	1 node Power RMS error(%)
REF	-	-	-
NEM	-2/6	-1.16/1.04	0.47
Case 1	4/6	1.62/1.19	0.57
Case 2	-2/6	0.77/1.06	0.33
Case 3	10/7	2.21/1.24	0.84
Case 4	11/7	3.36/1.27	1.33

Reference Keff = 1.02903

표 3. NEACRP-L336 문제의 유효증배계수 및 출력분포 비교

유효증배계수 오차

	1node/4nodes pcm	1node/4node Power max. error(%)
REF	-	-
NEM	-268/-48	3.30/0.72
Case 1	-62/0	-1.24/0.29
Case 2	-94/30	1.42/0.53
Case 3	1/7	-0.80/0.25
Case 4	63/11	-1.76/0.23

집합체 출력분포(1 node)

1.3568 3.30 1.02 1.42 0.38 -1.76	1.0831 -1.84 -0.36 -0.66 -0.07 1.17
1.0831 -1.84 -0.36 -0.66 -0.07 1.17	0.4770 -1.03 -1.24 -1.07 -0.80 -0.31

Reference Keff = 0.93816

표 4. EPRI-9R 문제의 유효증배계수 및 출력분포 비교

유효증배계수 오차

	1node/4nodes pcm	1node/4nodes Power max. error(%)
REF		-
NEM	-56/9	-1.34/0.10
Case 1	-7/1	-0.64/0.06
Case 2	-18/6	-0.82/0.05
Case 3	8/3	-0.48/0.07
Case 4	20/2	-0.44/0.10

집합체 출력 분포 (1 node)

0.5805 0.44 0.22 0.27 0.05 -0.14	1.0998 0.83 0.12 0.27 0.01 -0.44	1.0797 -0.15 0.09 0.05 0.13 0.36
1.0998 0.83 0.12 0.27 0.01 -0.44	1.3578 0.40 0.39 0.37 0.34 0.30	0.8514 -1.34 -0.64 -0.82 -0.48 -0.08
1.0797 -0.15 0.09 0.05 0.13 0.36	0.8514 -1.34 -0.64 -0.82 -0.48 -0.08	

Reference Keff = 0.89201