

## 우성 및 기성 중성자 수송 방정식의 차분법

### Differencing Methods for the Even- and Odd-Parity Neutron Transport Equations

노 태 완

홍익대학교  
서울 마포구 상수동 72-1

#### 요 약

1계 Boltzmann 차분 수송식으로부터 2계의 우성 및 기성 차분방정식과 확산 가속식을 유도하는 과정을 관련되는 경계 조건의 변환과 함께 보인다. 중성자속 직접 계산에 어려움이 있는 기성 수송 방정식에 대해 중성자속을 용이하게 계산하는 방법을 제시하며 이는 기성 수송 방정식에 대한 확산 가속법 개발을 가능하게 한다. 개발된 방법을 실제 문제에 적용하여 해석해와 비교하여 그 타당성을 확인한다.

#### Abstract

We show how to derive the the second-order even- and odd-parity equations and their DSA equations directly from the differenced forms of the first-order neutron transport equation. Also, we show how to convert boundary conditions expressed by the regular angular flux to the appropriate even- and odd-parity forms. The odd-parity equation has not been frequently used because it has been difficult to calculate the scalar flux directly using the odd-parity angular flux. We suggest a simple method to avoid this difficulty and it facilitates the use of the diffusion synthetic acceleration for the odd-parity equation. The developed methods are tested for a real numerical problem to show their validities.

#### 1. 서론

중성자의 매질 내에서의 거동은 시간, 위치, 방향, 에너지 등의 함수로 나타나며 중성자 수송방정식(neutron transport equation)으로 정확히 기술된다<sup>1</sup>. 전통적으로는 1계 미분방정식의 형태를 갖는 Boltzmann 수송식이 주로 사용되어 왔으나 컴퓨터 하드웨어 및 병렬처리 기법의 발달로 대규모 행렬계산이 용이해 짐에 따라 보다 수치적 안정성을 갖는 2계, self-adjoint 수송식의 해법에 많은 관심과 연구가 집중되고 있다.<sup>2-3</sup> 2계 self-adjoint형 수송식은 크게 우성 방향속(even-parity angular flux)을 미지수로 갖는 우성 수송식(even-parity transport equation)과 기성 방향속(odd-parity angular flux)을 미지수로 갖는 기성 수송식(odd-parity transport equation)이 있다. 이제까지는 주로 우성 수송식에 대해 연구가 집중되어 왔는데, 이는 수송식의 최종해인 중성자속(scalar flux) 계산에 있어 우성 방향속으로는 중성자속 계산이 직접 가능한 반면에 기성 방향속으로는 중성자속 계산이 직접 이루어지지 않는다는 점과

이로 인해 기성 수송식에 대한 적절한 확산 가속법(diffusion synthetic acceleration:DSA) 개발에 어려움이 있다는 점을 그 이유로 들 수 있다. 2계 수송식의 차분(differencing)에 있어서도 과거에는 차분 이전의 연속형태의 2계 미분 방정식에 기존의 유한 차분법(finite difference method)이나 유한 요소법(finite element method; lumping 포함)을 직접 적용하여 차분식을 얻는 것이 보통의 접근 방법이었으나 본 연구에서는 차분된 1계 수송식으로부터 우성 및 기성 수송식에 대한 2계 차분식을 유도하는 보다 용이한 과정을 보인다.

최근 또 다른 2계 수송식의 하나로 방향속(angular flux) 자체를 미지수로 갖는 SAAF (Self-Adjoint Angular Flux) 방정식이 소개되었고<sup>4</sup>, 이에 따라 SAAF와 기존 우성 및 기성 수송식에 대한 관련성, 계산의 정확도 및 SAAF에 적절한 경계 조건 설정 등이 주요한 이슈로 등장함<sup>5</sup>에 따라 기존 2계 수송식에 대한 명확한 이해가 필요한 시점이다. 미국의 Los Alamos National Laboratory에서도 중성자 수송 및 열복사 계산 관련 코드에 이미 2계 수송식을 사용하고 있으며 이를 바탕으로 한 코드 재 구축도 활발히 진행되고 있다.<sup>6</sup>

본 연구에서는 1계 Boltzmann 수송식으로부터 우성 및 기성속에 관한 1계 연립 차분 방정식으로부터 2계의 우성 및 기성 차분방정식을 유도하는 과정을 관련되는 경계 조건의 변환과 함께 보이고 기성 수송식의 해법에 있어서 계산된 기성 방향속을 이용해 쉽게 중성자속을 계산하는 방법과 이를 바탕으로 한 확산 가속법을 제시한다. 개발된 방법을 실제 문제에 적용하여 해석해와 비교하여 그 타당성을 확인한다. 또 다른 2계 수송식인 SAAF에 관한 연구<sup>4</sup>는 그 내용이 우성 및 기성 수송식에 대한 충분한 이해를 요구하므로 별개의 논문으로 대체한다.

## 2. 중성자 수송식과 경계조건

### 2.1 1계 중성자 수송식(first-order neutron transport equation)

1차원, 시간 비종속(time independent) 문제에 대한 1계 Boltzmann 수송식은

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma(x, E) \varphi(x, \mu, E) = \int dE' \int d\mu' \sigma_s(x, \mu' \rightarrow \mu, E' \rightarrow E) \varphi(x, \mu', E') + Q(x, \mu, E) \quad (1)$$

이다. 여기서,  $\varphi$ 는 방향속(angular flux)이고,  $x$ 와  $E$ 는 각각 위치와 에너지 변수,  $\mu$ 는  $x$ 축과 이루는 각의 cosine 값(direction cosine =  $\cos \theta$ )이며,  $\sigma$ 와  $\sigma_s$ 는 각각 거시총단면적(macroscopic total cross section)과 거시산란단면적(macroscopic scattering cross section)을 나타내고,  $Q$ 는 중성자원(neutron source)이다. 논의를 단순하게 하기 위하여, 내에너지군(within energy group), 등방산란(isotropic scattering) 및 등방원(isotropic source, 방향에 무관한 중성자원으로 핵분열항도 포함한다.)으로 한정하면 식(1)은

$$\mu \frac{\partial \varphi^{l+1/2}}{\partial x} + \sigma(x) \varphi^{l+1/2}(x, \mu) = \sigma_s(x) \phi^l(x) + Q(x) \quad (2)$$

로 단순해진다. 여기서,  $l$ 은 반복계산 단계를 나타내는 지표이다.  $\phi$ 는 중성자속(neutron scalar flux)으로 방향속에 대해

$$\phi^{l+1/2}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi^{l+1/2}(x, \mu) d\mu \quad (3)$$

로 정의되는데, 중성자속 개선을 위한 확산 가속을 적용하지 않는 경우는 식(3) 우변의  $\phi^{l+1/2}$ 이 바로

$\phi^{l+1}$ 로 사용된다. 한편, 중성자류(neutron current)  $J$ 는

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \phi(x, \mu) d\mu \quad (4)$$

로 정의된다. 여기서 1차원의 모든 방향을  $\int_{-1}^1 d\mu = 2$ 로 정규화하였다.

수송식의 경계조건(boundary conditions)으로 방향속에 대한 기지유입조건(known incoming conditions)과 반사조건(reflective conditions)을 다룬다. 중성자 거동을 기술하는데 편리하게 사용되는 기타의 경계조건도 유사한 방법으로 해석될 수 있다.

기지유입조건은 매질의 외부에서 유입되는 방향속의 방향별 크기를 나타낸다. 따라서, 왼쪽 경계  $x=a$ 에서의 기지유입조건은

$$\varphi(a, \mu) = f_L(\mu) \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (5)$$

로 표시된다. 물론  $f_L(\mu) = 0$ 일 때 외부로부터 유입이 없는 진공조건(vacuum condition)이 된다.

반사경계조건은 경계에서의 거울반사(mirror reflection)를 나타내며, 경계  $x=b$ 에 적용하면

$$\varphi(b, \mu) = \varphi(b, \mu') \quad (6)$$

이다. 여기서,  $\mu$ 는 중성자의 입사방향(incidence angle),  $\mu'$ 은 중성자의 반사방향(reflection angle)이다.

## 2.2 우성 및 기성 중성자 수송식

식(2)의 1계 수송식을 원래의 방향 역역의 반인  $0 \leq \mu \leq 1$ 에 적용하여 다시 쓰고, 이를 또한  $-\mu$ 에 적용하면

$$\mu \frac{\partial \phi^{l+1/2}(x, \mu)}{\partial x} + \sigma \phi^{l+1/2}(x, \mu) = \sigma_s \phi^l(x) + Q \quad (7)$$

$$-\mu \frac{\partial \phi^{l+1/2}(x, -\mu)}{\partial x} + \sigma(x) \phi^{l+1/2}(x, -\mu) = \sigma_s(x) \phi^l(x) + Q(x) \quad (8)$$

이 된다. 식(7)과 식(8)을 가감한 후 2로 나누어

$$\mu \frac{\partial \chi^{l+1/2}(x, \mu)}{\partial x} + \sigma(x) \chi^{l+1/2}(x, \mu) = \sigma_s(x) \phi^l(x) + Q(x) \quad (9)$$

$$\mu \frac{\partial \beta^{l+1/2}(x, \mu)}{\partial x} + \sigma(x) \beta^{l+1/2}(x, \mu) = 0 \quad (10)$$

를 얻는데, 여기서  $\chi$ 와  $\beta$ 는 각각 우성 방향속(even-parity angular flux)과 기성 방향속(odd-parity angular flux)으로 각각

$$\chi(x, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi(x, \mu) + \varphi(x, -\mu)] \quad (11)$$

$$\beta(x, \mu) = \frac{1}{2} [\varphi(x, \mu) - \varphi(x, -\mu)] \quad (12)$$

로 정의된다. 식(10)을  $\beta$ 에 대해 풀고 이를 식(9)에 대입하면 우성 수송식

$$-\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi^{l+1/2}}{\partial x} + \sigma \chi^{l+1/2}(x, \mu) = \sigma_s \phi^l(x) + Q \quad (13)$$

를 얻으며, 식(9)를  $\chi$ 에 대해 풀고 이를 식(10)에 대입하면 기성 수송식

$$-\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \beta^{l+1/2}}{\partial x} + \sigma \beta^{l+1/2}(x, \mu) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} [\sigma_s \phi^l(x) + Q] \quad (14)$$

를 얻을 수 있다. 식(13)과 식(14)는 각각 차분 이전의 연속 변수  $x$ 에 대한 2계 미분 방정식이며 방향 영역은  $0 \leq \mu \leq 1$ 로 1계 수송식 방향영역의 반으로 한정된다.

또한, 식(11)과 식(12)로부터  $\varphi = \chi + \beta$ 이므로 식(3)과 식(4)로 정의되는 중성자속과 중성자류는 각각

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\chi + \beta) d\mu = \int_0^1 \chi d\mu \quad (15)$$

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \varphi(x, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu (\chi + \beta) d\mu = \int_0^1 \mu \beta d\mu \quad (16)$$

로 변환되는데, 여기서는  $\chi$ 와  $\beta$ 가 방향  $\mu$ 에 대해 각각 우함수(even function)와 기함수(odd function)라는 점을 사용하였다. 이처럼 우성 방향속  $\chi$ 는 중성자속 계산에, 기성 방향속  $\beta$ 는 중성자류 계산에 직접 사용된다.

### 3. 우성 수송식의 해법

#### 3.1 우성 수송식의 차분(differencing of even-parity transport equation)

차분을 위한 격자(cell) 구조를  $x$ 의 정수 표시는 각 격자의 중심(center)을 나타내고  $x$ 의 반정수 표시는 각 격자의 끝점(vertex or edge)을 나타내도록 그림 1과 같이 정한다.

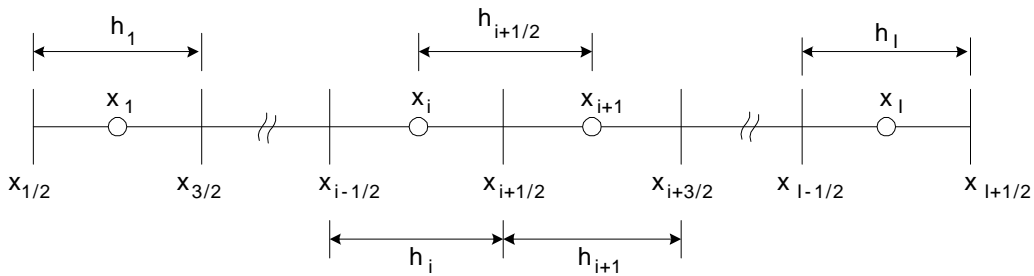


그림 1 격자(cell) 구조

우성 수송식의 차분은 우성 및 기성 방향속에 관한 1계 미분 방정식인 식(9)와 식(10)으로부터 시작된다. 식(9)를 구간  $[x_i, x_{i+1}]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m (\beta_{m,i+1}^{l+1/2} - \beta_{m,i}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \chi_{m,i+1/2}^{l+1/2} = \sigma_{s,i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^l + Q_{i+1/2} h_{i+1/2} \quad (17)$$

이고, 식(10)을 구간  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m (\chi_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \chi_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_i h_i \beta_{m,i}^{l+1/2} = 0 \quad (18)$$

이다. 여기서  $m$ , ( $m=1, 2, \dots, M$ )은 특정 차분방향(discrete direction)이고

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad \sigma_{i+1/2} = \frac{\sigma_i h_i + \sigma_{i+1} h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad Q_{i+1/2} = \frac{Q_i h_i + Q_{i+1} h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

이다. 식(18)을  $\beta_{m,i}^{l+1/2}$ 에 대해 풀면

$$\beta_{m,i}^{l+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_i h_i} (\chi_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \chi_{m,i-1/2}^{l+1/2}) \quad (19)$$

이고, 이를 이용하여 식(17)의  $\beta_{m,i}^{l+1/2}$ 와  $\beta_{m,i+1}^{l+1/2}$ 을 소거하여 2계 우성 차분식

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1} h_{i+1}} (\chi_{m,i+3/2}^{l+1/2} - \chi_{m,i+1/2}^{l+1/2}) + \frac{\mu_m^2}{\sigma_i h_i} (\chi_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \chi_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \chi_{m,i+1/2}^{l+1/2} \\ & = \sigma_{s,i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^l + Q_{i+1/2} h_{i+1/2} \end{aligned} \quad (20)$$

을 유도한다. 식(20)을 보면 미지수인 우성 방향속이 각 격자의 양단에 위치하며 우변의 중성자속  $\phi$  역시 격자의 양단에서 정의됨을 알 수 있다. 식(20)은 2계 우성 수송식의 연속형태인 식(13)에 대해 기존의 유한차분법 및 유한요소법과 단순화법(lumping technique)을 적용하여 구할 수 있는 차분식과 유사하다.

경계 조건으로 1절에서와 같이 왼쪽 경계는 기지유입조건, 오른쪽 경계는 반사조건을 가정한다. 경계  $x=x_{1/2}$ 에서의 기지유입조건은 식(5)에 의하면  $\mu_m > 0$ 에 대해  $\varphi_{m,1/2} = \chi_{m,1/2} + \beta_{m,1/2} = f_{m,L}$ 이므로

$$\beta_{m,1/2} = f_{m,L} - \chi_{m,1/2} \quad (21)$$

이다. 식(9)를 구간  $[x_{1/2}, x_1]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m (\beta_{m,1}^{l+1/2} - \beta_{m,1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{2} \sigma_1 h_1 \chi_{m,1/2}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sigma_{s,1} h_1 \phi_{1/2}^l + \frac{1}{2} Q_1 h_1 \quad (22)$$

이고, 여기에 식(19) [ $i=1$ ]와 식(21)을 이용하면 왼쪽 기지유입 경계에 대한 우성 차분식

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma_1 h_1} (\chi_{m,3/2}^{l+1/2} - \chi_{m,1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{2} \sigma_1 h_1 \chi_{m,1/2}^{l+1/2} + \mu_m \chi_{m,1/2}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sigma_{s,1} h_1 \phi_{1/2}^l + \frac{1}{2} Q_1 h_1 + \mu_m f_{m,L} \quad (23)$$

을 구할 수 있다. 오른쪽 경계의 반사조건은 식(6)에 의해  $\varphi_{I+1/2}(\mu) = \varphi_{I+1/2}(-\mu)$ 인데, 이는  $\chi_{I+1/2}(\mu) + \beta_{I+1/2}(\mu) = \chi_{I+1/2}(-\mu) + \beta_{I+1/2}(-\mu)$ 이므로  $\beta_{I+1/2}(\mu) = 0$ , 즉

$$\beta_{m,I+1/2} = 0 \quad (24)$$

이다. 이는 반사경계에서 기성 방향속의 값이 0이 됨을 의미한다. 식(9)를 구간  $[x_I, x_{I+1/2}]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m (\beta_{m,I+1/2}^{l+1/2} - \beta_{m,I}^{l+1/2}) + \frac{1}{2} \sigma_I h_I \chi_{m,I+1/2}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sigma_{s,I} h_I \phi_{I+1/2}^l + \frac{1}{2} Q_I h_I \quad (25)$$

이고, 여기에 식(19) [ $i=I$ ]과 식(24)를 이용하면 오른쪽 반사 경계에 대한 우성 차분식

$$\frac{\mu_m^2}{\sigma_I h_I} (\chi_{m,I+1/2}^{l+1/2} - \chi_{m,I-1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{2} \sigma_I h_I \chi_{m,I+1/2}^{l+1/2} = \frac{1}{2} \sigma_{s,I} h_I \phi_{I+1/2}^l + \frac{1}{2} Q_I h_I \quad (26)$$

을 얻는다. 우성 차분식은 내부 격자에 대한 식(20)과 경계에 관한 식(23)과 식(26)으로 이루어진다.

### 3.2 우성 수송식의 확산가속법

가속 방정식 없이 수송식만을 사용하는 계산은 수송식의 우변에 위치하는 중성자속의 값을 개선하는

속도가 매우느려, 특히 확산성이 높은 매질에서의 중성자 거동을 기술하는데 매우 비경제적이다. 근래에는 모든  $S_N$  계산에 확산가속법(diffusion synthetic acceleration:DSA)을 사용하여 계산속도를 빠르게 하고 있다. 1계 수송식에 대한 확산 가속식을 구할 때는 미지수인 방향속을  $P_1$ -근사하여 방향변수  $\mu_m$ 의 1차함수로 나타내지만 여기에서는 미지수인 우성 방향속이 우함수이므로 같은  $P_1$ -근사라 하더라도 단순히  $\chi_m = \phi$ 가 된다. 이를 식(20)에 적용하고 방향에 대해 적분하여

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\phi_{i+3/2}^{l+1/2} - \phi_{i+1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{3\sigma_i h_i}(\phi_{i+1/2}^{l+1/2} - \phi_{i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^{l+1/2} \\ & = \sigma_{s, i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^l + Q_{i+1/2} h_{i+1/2} \end{aligned} \quad (27)$$

을 얻는다. 여기서,  $\sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m^2 = 1/3$  이다. 거시흡수단면적이  $\sigma_a = \sigma - \sigma_s$ 일 때, 식(20)에 대응하는 확산 방정식(diffusion equation)을

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\phi_{i+3/2}^{l+1} - \phi_{i+1/2}^{l+1}) + \frac{1}{3\sigma_i h_i}(\phi_{i+1/2}^{l+1} - \phi_{i-1/2}^{l+1}) + \sigma_{a, i+1/2} h_{i+1/2} \phi_{i+1/2}^{l+1} = Q_{i+1/2} h_{i+1/2} \quad (28)$$

로 정의하고, 식(28)에서 식(27)을 빼면 **우성 확산 가속식**

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\epsilon_{i+3/2}^{l+1} - \epsilon_{i+1/2}^{l+1}) + \frac{1}{3\sigma_i h_i}(\epsilon_{i+1/2}^{l+1} - \epsilon_{i-1/2}^{l+1}) + \sigma_{a, i+1/2} h_{i+1/2} \epsilon_{i+1/2}^{l+1} \\ & = \sigma_{s, i+1/2} h_{i+1/2} (\phi_{i+1/2}^{l+1/2} - \phi_{i+1/2}^l) \end{aligned} \quad (29)$$

을 얻는다. 여기서,  $\epsilon^{l+1}$ 은  $l+1$  반복계산 단계에서의 중성자속 오차

$$\epsilon^{l+1} = \phi^{l+1} - \phi^{l+1/2} \quad (30)$$

이고,  $l+1/2$  단계의 중성자속은 정의에 의해

$$\phi^{l+1/2} = \sum_{m=1}^M \omega_m \chi_m^{l+1/2} \quad (31)$$

로 계산한다. 양쪽 경계에 대해서도 식(29)와 같은 확산 가속식이 필요하다. 우성 수송식의 경계식인 식(23)과 식(26)에 대하여 유사한 방법을 적용하면 기지유입조건을 갖는 왼쪽 경계와 반사조건을 갖는 오른쪽 경계에서의 확산 가속식은 각각

$$-\frac{1}{3\sigma_1 h_1}(\epsilon_{3/2}^{l+1} - \epsilon_{1/2}^{l+1}) + \frac{1}{2} \sigma_{a, 1} h_1 \epsilon_{1/2}^{l+1} + \alpha_{EP} \epsilon_{1/2}^{l+1} = \frac{1}{2} \sigma_{s, 1} h_1 (\phi_{1/2}^{l+1/2} - \phi_{1/2}^l) \quad (32)$$

$$-\frac{1}{3\sigma_I h_I}(\epsilon_{I+1/2}^{l+1} - \epsilon_{I-1/2}^{l+1}) + \frac{1}{2} \sigma_{a, I} h_I \epsilon_{I+1/2}^{l+1} = \frac{1}{2} \sigma_{s, I} h_I (\phi_{I+1/2}^{l+1/2} - \phi_{I+1/2}^l) \quad (33)$$

이 된다. 여기서  $\alpha_{EP} = \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m$ 이다. 확산 가속이 포함된 우성 수송식의 계산 절차는 다음과 같다.

- (i) 우성 수송식[식(20), (23), (26)]을 각 차분방향에 대하여 풀어  $\chi_m^{l+1/2}$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )을 계산한다.
- (ii) 식(31)로  $\phi^{l+1/2}$ 을 계산한다.
- (iii) 확산 가속식[식(29),(32),(33)]을 풀어  $\epsilon^{l+1}$ 를 계산한다.
- (iv) 식(30)으로  $\phi^{l+1}$ 의 값을 개선한다.
- (v)  $\phi^{l+1}$ 의 값이 수렴할 때까지 (i)-(v) 단계를 반복한다.

#### 4. 기성 수송식의 해법

##### 4.1 기성 수송식의 차분(differencing of odd-parity transport equation)

기성 차분식 또한 유사한 방법으로 유도될 수 있다. 식(9)를  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m(\beta_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \beta_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_i h_i \chi_{m,i}^{l+1/2} = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^l + Q_i h_i \quad (34)$$

이고, 식(10)을 구간  $[x_i, x_{i+1}]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m(\chi_{m,i+1}^{l+1/2} - \chi_{m,i}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \beta_{m,i+1/2}^{l+1/2} = 0 \quad (35)$$

이다. 식(34)를  $\chi_{m,i}^{l+1/2}$ 에 대해 풀면

$$\chi_{m,i}^{l+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_i h_i} (\beta_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \beta_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{\sigma_i} (\sigma_{s,i} \phi_i^l + Q_i) \quad (36)$$

이고, 이를 이용하여 식(35)의  $\chi_{m,i}^{l+1/2}$ 와  $\chi_{m,i+1}^{l+1/2}$ 을 소거하면 2계 기성 차분식

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1} h_{i+1}} (\beta_{m,i+3/2}^{l+1/2} - \beta_{m,i+1/2}^{l+1/2}) + \frac{\mu_m^2}{\sigma_i h_i} (\beta_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \beta_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2} h_{i+1/2} \beta_{m,i+1/2}^{l+1/2} \\ & = -\mu_m \left[ \frac{1}{\sigma_{i+1}} (\sigma_{s,i+1} \phi_{i+1}^l + Q_{i+1}) - \frac{1}{\sigma_i} (\sigma_{s,i} \phi_i^l + Q_i) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

을 얻는다.

경계  $x=x_{1/2}$ 에서의 지지유입조건은 식(5)에 의해  $\mu_m > 0$ 에서  $\varphi_{m,1/2} = \chi_{m,1/2} + \beta_{m,1/2} = f_{m,L}$ 이므로

$$\chi_{m,1/2} = f_{m,L} - \beta_{m,1/2} \quad (38)$$

이다. 식(10)을 구간  $[x_{1/2}, x_1]$ 에 대해 적분하면

$$\mu_m(\chi_{m,1}^{l+1/2} - \chi_{m,1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{2} \sigma_1 h_1 \beta_{m,1/2}^{l+1/2} = 0 \quad (39)$$

이고, 여기에 식(36) [ $i=1$ ]과 식(38)을 이용하면 왼쪽 지지유입 경계에 대한 기성 차분식

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma_1 h_1} (\beta_{m,3/2}^{l+1/2} - \beta_{m,1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{2} \sigma_1 h_1 \beta_{m,1/2}^{l+1/2} + \mu_m \beta_{m,1/2}^{l+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_1} (\sigma_{s,1} \phi_1^l + Q_1) + \mu_m f_{m,L} \quad (40)$$

을 구할 수 있다. 오른쪽 경계에서의 반사조건은 식(24)에서 이미  $\beta_{m,I+1/2} = 0$ 이므로  $x_{I+1/2}$ 에서 기성 방향속의 계산은 불필요하다.

식(37)과 식(40)을 보면 미지수인 기성 방향속은 우성 수송식의 경우에서와 같이 격자 양단에 위치하지만 우변의 중성자속  $\phi$ 는 격자 중앙에서 정의되는데, 이것이 기성 수송식을 풀기 위해서 중성자속  $\phi$ 의 계산을 위한 추가적인 절차가 필요한 이유이다.

##### 4.2 기성 수송식 계산에서 중성자속 계산

실제로 수송식을 방향차분법(discrete ordinates method,  $S_N$ )을 사용하여 푸는 경우는 식의 우변에 위치하는 중성자속  $\phi$ 를 계산하기 위해 중성자원 반복(source iteration) 또는 확산가속이 필수적이다. 하지만 기성 수송식을 푸는 과정에서는 매 반복 단계에서 구해지는 기성 방향속  $\beta$ 로 직접 중성자속을 계산하는 것이 불가능하므로 이를 위한 추가 과정이 필요하게 된다. 식(15)에서 알 수 있듯이 중성자속  $\phi$

는 우성 방향속  $\chi$ 를 방향적분하여 계산되어질 수 있다. 따라서, 식(39)를 방향 적분하여 얻어지는 식

$$\phi_i^{l+1/2} = -\frac{1}{\sigma_i h_i} \sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m (\beta_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \beta_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{\sigma_i} (\sigma_{s,i} \phi_i^l + Q_i) \quad (41)$$

으로 중성자속을 간접적으로 계산할 수 있다. 즉, 격자 중앙의 중성자속을 중성자속의 정의를 이용하지 않고 격자 양단의 기성 방향속을 이용하여 계산하는 것이다. 여기서 주의할 점은 식(41) 좌변의  $\phi^{l+1/2}$  과 우변의  $\phi^l$ 을 반드시 다른 항으로 분리해야  $\phi^{l+1}$ 에 대해 수렴하는 값을 얻을 수 있다는 점이다. 물론 확산 가속을 적용하지 않는 계산의 경우는 식(41) 좌변의  $\phi^{l+1/2}$ 은  $\phi^{l+1}$ 로 대체 되어야 한다.

#### 4.3 기성 수송식의 확산가속법

차분된 기성 수송식 자체로는 중성자속을 계산할 수 있는 확산 근사식을 만드는 것이 불가능하다. 따라서, 기성 방향속으로 계산될 수 있는 중성자속을 통한 가속법 개발 등이 일부 시도 되었으나 성공하지 못했고, 기성 수송식에 대한 가속법은 아직 관련 학계에 알려지지 않고 있다. 저자가 생각한 기성 수송계산을 위한 확산 가속법에 대한 아이디어는 기성 수송식을 풀기 위해서는 격자의 중앙에서 계산되는 중성자속이 필요하다는 점과 중성자속은 우성 방향속으로 계산되어진다는 점에 착안하여, 격자 중앙에서 정의되고 우성 방향속을 미지수로 갖는 또 다른 수송식을 먼저 유도해야 한다는 것이다. 즉, 기성 차분식을 유도하기 위해 사용되었던 식(34)와 식(35)로부터 기성 차분식을 유도할 때와는 달리  $\chi_{m,i}$ 에 관한 수송식을 먼저 유도하고, 이를 이용해 해당 확산 가속식을 구하는 것이다. 이를 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

식(35)를  $\beta_{m,i+1/2}^{l+1/2}$ 에 대해 풀고, 이를 식(34)에 대입하면 격자 중앙에서 정의되는 우성 수송식

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}} (\chi_{m,i+1}^{l+1/2} - \chi_{m,i}^{l+1/2}) + \frac{\mu_m^2}{\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}} (\chi_{m,i}^{l+1/2} - \chi_{m,i-1}^{l+1/2}) + \sigma_i h_i \chi_{m,i}^{l+1/2} = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^l + Q_i h_i \quad (42)$$

을 얻는다. 확산 가속식을 구하기 위해 마찬가지로  $\chi_m = \phi$ 로 근사하고 식(42)를 전 방향으로 적분하면

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}} (\phi_{m,i+1}^{l+1/2} - \phi_{m,i}^{l+1/2}) + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}} (\phi_{m,i}^{l+1/2} - \phi_{m,i-1}^{l+1/2}) + \sigma_i h_i \phi_{m,i}^{l+1/2} = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^l + Q_i h_i \quad (43)$$

이다. 식(42)에 대응하는 확산 방정식을

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}} (\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}) + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}} (\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}) + \sigma_{a,i} h_i \phi_i^{l+1} = Q_i h_i \quad (44)$$

로 정의하고, 식(44)에서 식(43)을 빼면 기성 확산 가속식

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}} (\epsilon_{i+1}^{l+1} - \epsilon_i^{l+1}) + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}} (\epsilon_i^{l+1} - \epsilon_{i-1}^{l+1}) + \sigma_{a,i} h_i \epsilon_i^{l+1} = \sigma_{s,i} h_i (\phi_i^{l+1/2} - \phi_i^l) \quad (45)$$

을 얻는다. 유사한 방법으로 기지유입조건을 갖는 왼쪽 경계와 반사조건을 갖는 오른쪽 경계에서의 기성 확산 가속식은 각각

$$-\frac{1}{3\sigma_{3/2} h_{3/2}} (\epsilon_2^{l+1} - \epsilon_1^{l+1}) + \sigma_{a,1} h_1 \epsilon_1^{l+1} + \alpha_{OP} \epsilon_1^{l+1} = \sigma_{s,1} h_1 (\phi_1^{l+1/2} - \phi_1^l) \quad (46)$$

$$\frac{1}{3\sigma_{I-1/2} h_{I-1/2}} (\epsilon_I^{l+1} - \epsilon_{I-1}^{l+1}) + \sigma_{a,I} h_I \epsilon_I^{l+1} = \sigma_{s,I} h_I (\phi_I^{l+1/2} - \phi_I^l) \quad (47)$$

이 된다. 여기서  $\alpha_{OP} = \frac{\sum_{m=1}^M \omega_m \mu_m^2 f_{m,L}}{\mu_m + \sigma_1 h_1/2}$  이다. 확산 가속이 포함된 기성 수송식의 계산 절차는 다음과



같다.

- (i) 기성 수송식[식(37), (40)]을 각 차분방향에 대하여 풀어  $\beta_m^{l+1/2}$  ( $m=1,2,\dots,M$ )을 계산한다.
- (ii) 식(41)로  $\phi^{l+1/2}$ 을 계산한다.
- (iii) 확산 가속식[식(45),(46),(47)]을 풀어  $\epsilon^{l+1}$ 을 계산한다.
- (iv) 식(30)으로  $\phi^{l+1}$ 의 값을 개선한다.
- (v)  $\phi^{l+1}$ 의 값이 수렴할 때까지 (i)-(v) 단계를 반복한다.

우성 수송계산에서의 확산 가속과 기성 수송계산에서의 확산 가속과의 차이는  $\phi^{l+1/2}$ 을 계산하는 방법의 차이일 뿐이며 이는 식(31)과 식(41)에서 보는 바와 같이 계산 효율성으로 볼 때 큰 차이가 없다.

## 5. 수치계산 및 결과

앞에서 언급한 기성 및 우성 수송의 계산 모형은 해당 확산 가속법과 함께 프로그램화되어 실제 수치 문제에 적용하고 그 계산 결과를 확인하였다. 대상 문제는 참고문헌 4에 해석해와 함께 소개된 것으로 전체 길이가 1 cm이고  $\sigma=2 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\sigma_s=1 \text{ cm}^{-1}$ ,  $Q=1 \text{ cm}^{-3}\text{s}^{-1}$ 이며, 왼쪽과 오른쪽이 모두 진공조건을 갖는 1차원 등산란, 균질매질 문제이다. 여기에서는 본문에서 보인 우성 및 기성 수송식의 반사조건식을 검증하기 위하여 오른쪽 0.5 cm 지점에 반사조건을 두고 계산하였다. 격자 간격은 0.05cm를 사용하였고  $S_2$  방향차분 계산을 수행하였는데  $S_2$  계산의 경우는 Mark 경계조건을 갖는  $P_1$  방정식과 동일하므로 중성자속에 대한 해석해가 가능하며 이는

$$\phi = 1 - \frac{\exp[\sqrt{6}(1-x)] + \exp[\sqrt{6}x]}{1 - 1/\sqrt{2} + (1 + 1/\sqrt{2})\exp[\sqrt{6}]}$$

로 소개되었다.

계산 결과는 그림 2와 표 1에 나타나는데 우성 및 기성 수송식을 사용하여 구해진 중성자속의 수치해가 모두 해석해에 잘 근접함을 보이고 있다. 물론 더 작은 격자 간격을 사용하면 더욱 정확한 결과를 보이겠지만, 본 연구의 목적이 개발된 우성 및 기성 수송해법과 해당 확산가속법이 올바르게 수행되고 있음을 확인하는 것이므로 더 이상의 수치 실험 결과는 보이지 않겠다. 표 1에 의하면 본  $S_2$  계산에 있어서 우성 및 기성 수송식에 대한 확산 가속법의 반복계산 수가 정확히 1회이므로 이 역시 올바르게 수행됨을 나타내고 있다.

## 6. 결론 및 추후 연구 내용

2계 self-adjoint 형의 중성자 수송식에 대한 연구가 집중되고 있으나 기성 수송식의 경우는 기성 방향속에 의한 중성자속의 직접 계산이 불가능하고 이로 인해 적절한 확산 가속법 채택에 어려움이 있어 이제까지 연구의 방향이 주로 우성 수송식에 의존되어 왔다. 본 연구에서는 이러한 기성 수송식의 문제점을 용이하게 해결하는 해법을 제안하고 성능을 수치적으로 입증하였다. 최근 또 다른 형태의 self-adjoint형 중성자 수송식으로 방향속(angular flux) 자체를 미지수로 갖는 SAAF(Self Adjoint Angular Flux Equation)가 제안되어 기존 우성 및 기성 수송식과의 관련성과 그 응용에 대한 관심이 높아지고 있는데, 우성 및 기성 수송식에 대한 해법을 명확히 한 본 연구는 앞으로의 SAAF 관련 연구에 기초가 된다.

## 감사의 글

본 연구는 저자가 2001년 8월부터 2002년 8월까지 Los Alamos National Lab.의 Transport Methods Group에서 1년간의 연구원으로 radiative transfer 연구에 참여하던 중 기초연구로 수행한 것으로 본 연구에 많은 조언을 준 Dr. Jim Morel에게 감사의 마음을 전한다.

## 참고문헌

1. E. E. Lewis and W. F. Miller, Jr., *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons, 1984
2. M. L. Adams, "Even- and Odd-Parity Finite Element Transport Solutions in the Thick Diffusion Limit", *Proc. Int. Topl. Mtg.*, Pittsburgh, Pennsylvania, Vol. 5, ANS, 1991
3. Taewan Noh, W. F. Miller, Jr, and J. E. Morel, "The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equations in Two-Dimensional x-y Geometry", *Nucl. Sci. & Eng.*, **123**, 1996
4. J. E. Morel and J. M. McGhee, "A Self-Adjoint Angular Flux Equation", *Nucl. Sci. & Eng.*, **132**, 1999
5. C. J. Gesh, M. L. Adams, "Finite Element Solutions of Second-Order Forms of the Transport Equation at the Interface between Diffusive and Non-Diffusive regions", *Proceedings of ANS meeting*, Salt Lake City, Utah, September, 2001
6. Private Communications with J. E. Morel, et. al. at Los Alamos national Lab., 2002

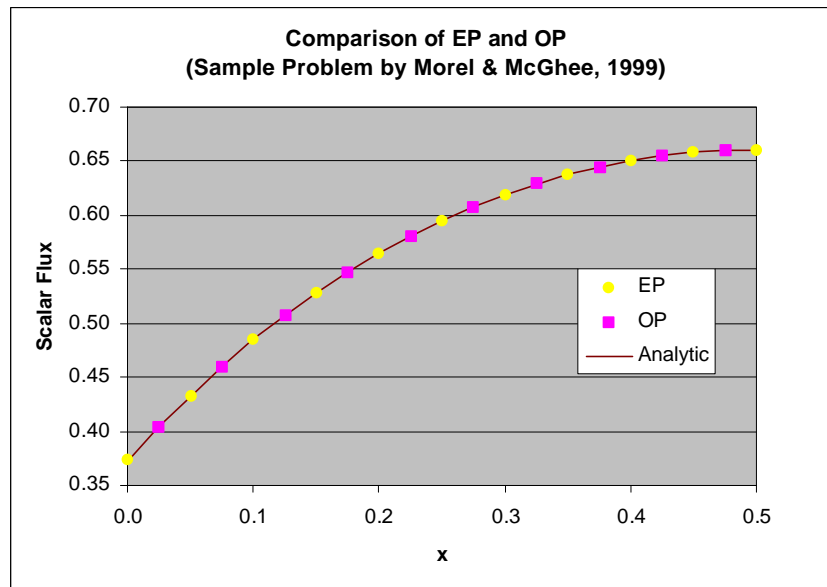


그림 2 우성(EP) 및 기성(OP) 수송식으로 계산된 중성자속 비교

표 1 우성(EP) 및 기성(OP) 수송식으로 계산된 중성자속 비교

<b>x</b>	<b>EP</b>	<b>OP</b>	<b>Analytic</b>
0.000	0.3733		0.3729
0.025		0.4047	0.4041
0.050	0.4333		0.4330
0.075		0.4603	0.4598
0.100	0.4847		0.4845
0.125		0.5077	0.5073
0.150	0.5284		0.5283
0.175		0.5478	0.5475
0.200	0.5651		0.5650
0.225		0.5811	0.5809
0.250	0.5952		0.5952
0.275		0.6082	0.6079
0.300	0.6193		0.6193
0.325		0.6293	0.6291
0.350	0.6376		0.6376
0.375		0.6449	0.6448
0.400	0.6505		0.6506
0.425		0.6552	0.6550
0.450	0.6582		0.6582
0.475		0.6603	0.6601
0.500	0.6608		0.6608
<b>Absorption Rate</b>	<b>0.2845</b>	<b>0.2850</b>	<b>0.2846</b>
<b>No. of DSA</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	