

2003 춘계학술발표회 논문집

한국원자력학회

판의 자유진동해석에서 저차고체요소의 성능비교연구

A Comparison Study of the Performance of Lower Order Solid Finite Elements in Free Vibration Analysis of Plates Structures

이상진, 이영정, 전영선, 서정문

한국원자력연구소

대전광역시 유성구 덕진동 150

요약

이 연구는 판의 자유진동해석에서 저차고체요소의 성능을 조사하고 그 결과를 비교 분석하였다. 세 가지의 8절점 고체요소가 유한요소해석에 이용되었으며 이 요소들은 각각 표준 변형도-변위관계식, B-bar법 그리고 향상된 가변형도법을 바탕으로 개발되었다. 자유진동해석에서 고체요소의 수렴성과 정확성을 정사각형 판과 원판을 통하여 분석하였다. 수치해석결과로부터 향상된 가변형도법을 도입한 고체요소는 다른 두 요소에 비해서 판의 자유진동해석에서 그 성능이 매우 우수한 것으로 나타났다. 마지막으로 본 연구를 통하여 비교 분석한 해석결과는 고체요소를 이용한 판 구조물의 자유진동해석에 대한 벤치마크 테스트로 제시하였다.

Abstract

This study intends to investigate the performance of lower order solid finite elements in the free vibration analysis of plate structures. Three 8-node solid finite elements are formulated with the standard strain-displacement relationship, B-bar method and enhanced assumed strain (EAS) method. The rate convergence and accuracy of solid finite element in the plate free vibration analysis are investigated by using two benchmark tests. From numerical results, the solid finite element with EAS exhibits a better performance than other two solid finite elements in free vibration situation. Finally, we propose the present numerical results as a future benchmark test for free vibration analysis of plate structures with lower order solid element.

1. 서론

컴퓨터산업의 눈부신 발달은 컴퓨터의 계산속도를 증가시키고 거대구조물의 해석을 용이하게 하였다. 그러나 실제구조물의 유한요소해석에는 고차요소에 비해 저차유한요소의 이용이 빈번히 요구되고 있다. 표준저차고체요소는 구조물의 휨 거동을 적절히 표현하지 못하거나 비압축성 재료와 함께 사용될 경우 강성과대현상을 나타내는 등의 단점을 나타내고 있다. 이러한 단점들을 개선하기 위하여 선택적인 감차적분 [1], 안정화 기법 [2], B-bar법 [3] 그리고 향상된 가변형도법 [4]과 같은 방법들이 제시되고 있다. 감차적분은 생성되는 강성행렬을 다소 유연하게 하지만 차수를 줄임으로써 발생하는 모래시계모드로 인해 해가 발산하게 되고 결국 이러한 현상을 개선하기 위해 안정화 기법을 도입하게 되었다. 또한 비압축성재료를 이용할 경우에 발생하는 강성과대현상은 B-bar법을 도입하여 개선하기도 하였다. 그러나 판 또는 쉘 구조물에 적용되는 고체요소의 성능저하는 여전히 존재하며 따라서 고체요소를 향상시키기 위한 연구가 계속 진행되고 있다. 요소를 개선하기 위한 과정에는 다양한 비교연구가 필요한데 고체요소를 이용한 응력해석은 그 비교연구가 다소 진행되었으나 자유진동해석에 대한 비교연구는 그 수가 매우 적다. 따라서 본 연구에서는 판의 자유진동해석에 세 가지의 다른 고체요소를 적용하여 각 요소의 성능을 알아보고 그 결과를 비교 분석하고자 한다.

이 논문에서는 고체요소를 형성하기 위하여 표준 변형도-변위관계식, B-bar법 그리고 향상된 가변형도법에 따른 변형도-변위관계식에 대해 함께 기술하고 이를 바탕으로 개발된 컴퓨터 프로그램을 이용하여 판 구조물에 대한 고체요소의 자유진동 해석에 대한 성능을 비교분석하고 그 결과를 기술하였다.

2. 고체유한요소의 정식화

이 절에서는 자유진동해석에 이용한 8절점 저차고체요소의 정식화 과정 중 변형도-변위관계에 대하여 중점적으로 기술하였다. 본 연구에서는 고체요소를 형성하기 위하여 등매개변수법을 이용하였으며 요소의 위치벡터와 변위장을 다음과 같이 정의하였다.

$$\mathbf{x} = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{x}^a, \mathbf{u} = \sum_{a=1}^8 N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{u}^a \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x}$ 는 요소영역 내의 임의 점에 대한 위치벡터이고 $\mathbf{x}^a$ 는 절점 a 에서의 위치벡터를 나타낸다. $\mathbf{u}$ 는 변위벡터를 나타내고 $\mathbf{u}^a$ 는 절점 a 에서의 변위벡터를 나타낸다. 그리고 고체요소를 형성하기 위해 사용된 형상함수는 다음과 같다.

$$N_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{8}(1 + \xi_1 \xi_1^a)(1 + \xi_2 \xi_2^a)(1 + \xi_3 \xi_3^a), \quad (a=1,8) \quad (2)$$

여기서 ξ_i^a 는 자연좌표계로 표현된 절점 a 의 위치를 나타낸다.

고체요소를 형성하기 위하여 여섯 개의 변형률 항을 전체좌표계의 성분으로 다음과 같이 정의하였다.

$$\varepsilon_{ij} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

여기서 u_i 전체좌표계의 단위벡터에 준하는 변위성분을 나타낸다.

이산화된 유한요소 영역에서 변형률 항은 식(1)과 (2)를 (3)에 적용함으로써 계산할 수 있다. 절점변위벡터를 이용하여 변형률을 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{a=1}^8 \mathbf{B}^a \mathbf{u}^a \quad (4)$$

이 연구에서는 식(4)의 변형률-변위관계식을 표준 변형률-변위관계식, B-bar법, 향상된 변형률을 이용하여 유도하고 이를 프로그램화 하였다.

2.1 표준 변형률-변위관계를 이용한 $\mathbf{B}$ 행렬

표준 변형률-변위관계식을 이용한 $\mathbf{B}$ 행렬은 형상함수의 그래디언트 $N_{a,i} (= \partial N_a / \partial x_i)$ 를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\mathbf{B}^a = \begin{bmatrix} N_{a,1} & 0 & 0 & N_{a,2} & 0 & N_{a,3} \\ 0 & N_{a,2} & 0 & N_{a,1} & N_{a,3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,3} & 0 & N_{a,2} & N_{a,1} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

유도된 $\mathbf{B}$ 행렬은 감차적분을 도입할 경우 2차원요소에서는 나타나지 않는 12개의 모래시계모드가 나타나고 이중 6개는 휨과 관련이 있고 3개는 비틀림에 관련이 있는 것으로 알려져 있다. 이러한 현상을 없애기 위하여 안정화 기법[2]이 제안된 바 있다. 본 연구에서는 적합변형률성분을 표현하기 위해 안정화 기법을 도입하였다.

2.2 B-bar법을 이용하여 형성된 **B** 행렬

표준 변형도-변위관계식을 이용하여 형성된 고체요소는 비압축성재료와 함께 사용될 경우 강성과대현상을 나타낸다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 B-bar법은 변형률을 편차성분과 팽창성분으로 다음과 같이 분리한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} + \boldsymbol{\varepsilon}_{dil} = \sum_{a=1}^8 \left\{ \mathbf{B}_{dev}^a + \mathbf{B}_{dil}^a \right\} \mathbf{u}^a \quad (6)$$

식(6)에 정의된 팽창성분 $\mathbf{B}_{dil}$ 는 “평균팽창변형률법”을 이용하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{dev} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{dil} = \sum_{a=1}^8 \left\{ \mathbf{B}_{dev}^a + \bar{\mathbf{B}}_{dil}^a \right\} \mathbf{u}^a = \sum_{a=1}^8 \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}^a \quad (7)$$

여기서 팽창성분 $\bar{\mathbf{B}}_{dil}^a$ 을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{B}}_{dil}^a = \begin{bmatrix} \bar{B}_1^a & \bar{B}_1^a & \bar{B}_1^a & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_2^a & \bar{B}_2^a & \bar{B}_2^a & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_3^a & \bar{B}_3^a & \bar{B}_3^a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

여기서 행렬 $\bar{\mathbf{B}}_{dil}^a$ 의 성분은 다음식을 이용하여 구하였다.

$$\bar{\mathbf{B}}_i^a = \frac{1}{V^{(e)}} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_i^a dV \quad (9)$$

따라서 B-bar법을 이용한 변형률-변위관계행렬 $\bar{\mathbf{B}}^a$ 는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{B}}^a = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2B_1^a + \bar{B}_1^a & \bar{B}_1^a - B_1^a & \bar{B}_1^a - B_1^a & 3B_2^a & 0 & 3B_3^a \\ \bar{B}_2^a - B_2^a & 2B_2^a + \bar{B}_2^a & \bar{B}_2^a - B_2^a & 3B_1^a & 3B_3^a & 0 \\ \bar{B}_3^a - B_3^a & \bar{B}_3^a - B_3^a & 2B_3^a + \bar{B}_3^a & 0 & 3B_2^a & 3B_1^a \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

2.3 향상된 가변형률 법을 이용한 **B** 행렬

EAS법이 내포하는 변분의 토대는 Hu-Washizu법칙에 있으며 선형탄성의 문제에 대한 Hu-

Washizu법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}^T \nabla \mathbf{u}) dV - \Pi_e(\mathbf{u}) \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ 는 각각 변위, 변형도 그리고 응력벡터를 나타낸다. 행렬 $\mathbf{D}$ 는 응력-변형률관계를 나타내며 ∇ 는 미분연산자이다.

EAS법의 기본개념은 다음과 같이 적합변형률에 비적합변형률 성분을 도입하여 그 성능을 향상시키는 데 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^c + \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (12)$$

여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}^c (= \nabla \mathbf{u})$ 는 적합변형률을 나타내고 $\boldsymbol{\varepsilon}^i$ 는 비적합변형률을 나타낸다. .

이때 도입되는 비적합변형률을 응력장에 직교하는 항으로 선택하면 다음과 같다.

$$\int_{V^{(e)}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i dV = 0 \quad (13)$$

식(12)와(13)를 (11)에 대입하면 응력장이 제거되고 다음과 같은 식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}^c + \boldsymbol{\varepsilon}^i)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^c + \boldsymbol{\varepsilon}^i) dV - \Pi_e(\mathbf{u}) \quad (14)$$

본 연구에서는 비적합변형률의 항을 다음과 같이 가정하였다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha} \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{G}$ 는 형상함수행렬을 나타내고 $\boldsymbol{\alpha}$ 는 변형률매개변수를 나타낸다. 본 연구에서는 세 개의 비 적합모드를 도입하였으며 이에 대한 형상함수는 다음과 같다.

$$\tilde{N}_k = \frac{1}{2} (\xi_k^2 - 1) \quad (k=1,3) \quad (16)$$

따라서 변형률을 개선하기 위해 도입된 비적합변형률에 대한 행렬 $\mathbf{G}$ 를 명시적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{G}^a = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{a,1} & 0 & 0 & \tilde{N}_{a,2} & 0 & \tilde{N}_{a,3} \\ 0 & \tilde{N}_{a,2} & 0 & \tilde{N}_{a,1} & \tilde{N}_{a,3} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{a,3} & 0 & \tilde{N}_{a,2} & \tilde{N}_{a,1} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

식 (15)와 (16)를 (14)에 대입하면 다음과 같은 행렬식으로 나타난다:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

여기서 $\mathbf{K}$ 는 변위법에 의해 유도된 표준 강성행렬을 나타내고 행렬 $\mathbf{D}$ 와 $\mathbf{L}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{K} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{D} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} dV, \quad \mathbf{L} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (19)$$

변형도 매개변수 $\boldsymbol{\alpha}$ 에 대해서 식(18)의 행렬식을 축약하면 다음과 같은 요소강성행렬이 계산된다.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \{\mathbf{L}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}\} \quad (20)$$

3. 수치해석

판 구조물의 자유진동에 대한 고체요소의 정확성과 수렴성을 분석하기 위하여 두 가지의 판 구조물을 해석하였다. 본 연구에서는 부분공간 반복법(subspace iteration method)을 이용하여 판의 주파수를 계산하였으며 강성행렬은 전 절에 기술한 세 가지의 변형률-변위관계식을 이용하여 유도하였다. 본 연구에서는 강성행렬과 질량행렬을 형성하기 위하여 정차의 $2 \times 2 \times 2$ Gauss적분법을 이용하였다.

3.1 정사각형 판

도입된 판의 수렴성을 분석하기 위하여 고정 지지된 정사각형 판의 자유진동해석을 실시하였다. 본 연구에서는 판의 유한요소 수를 양방향으로 일정하게 증가시키고 한 방향에 대한 유한요소의 수를 기준으로 주파수를 표현하였다. 자유진동해석에서 계산된 주파수를 다음과 같은 주파수매개변수를 사용하여 표현하였다.

$$\Omega_n = \omega_n a^2 (\rho / G)^{\frac{1}{2}}$$

여기서 a 는 판의 한 변의 길이를 나타내고 ρ 는 재료의 밀도, $G = E/2(1+\nu)$ 는 전단강성계수, E 는 탄성계수 그리고 $\nu = 0.3$ 는 프와송비를 나타낸다.

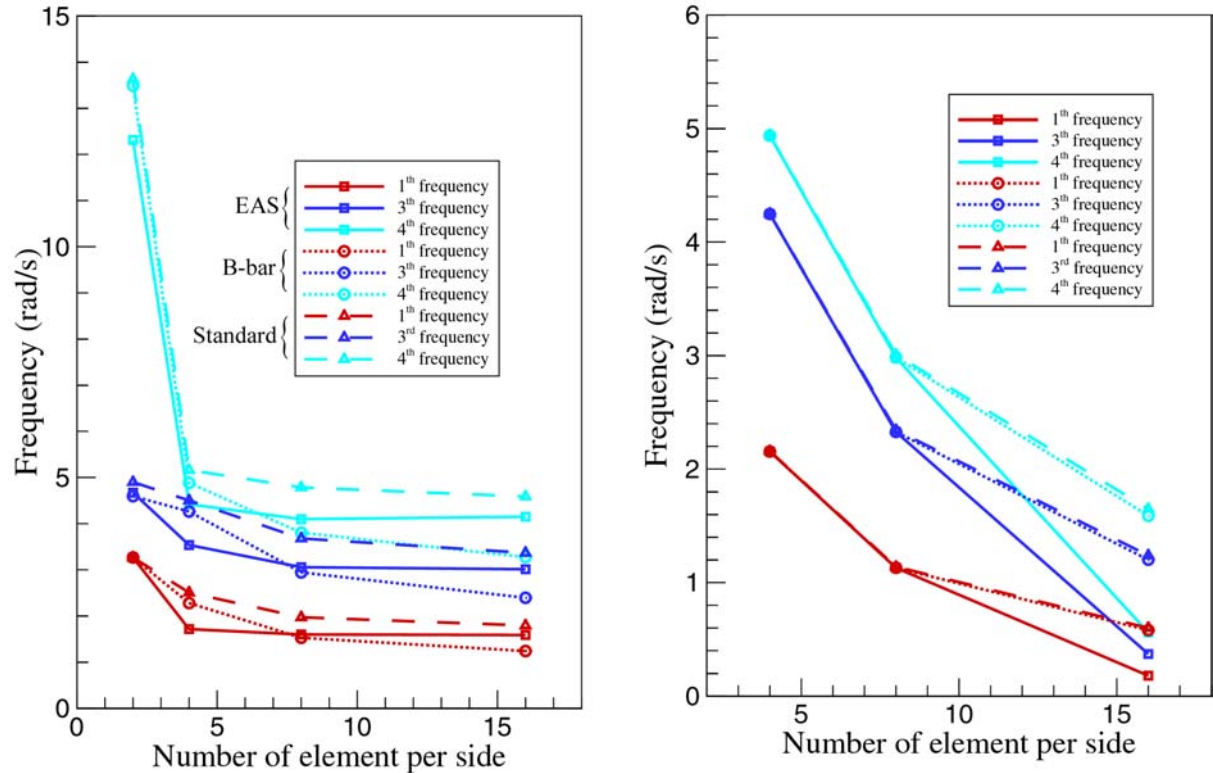


그림 1 고정 지지된 정사각형 판의 수렴성: (좌) 두꺼운 판, (우) 얇은 판

이 예제에서는 두꺼운 판(두께/변의길이=0.1)과 얇은 판(두께/변의길이=0.01)에 대해서 해석을 수행하였으며 다중 주파수를 제외한 초기 3개의 주파수를 그림 1에 비교하였다. 두꺼운 판의 경우 한번에 대한 요소의 수가 4개를 초과하면 유한요소의 수가 증가하여도 해가 느린 수렴속도를 보이는 듯하나 이는 이미 적은 수의 유한요소로 해가 정해에 가까이 수렴하였기 때문이다. 반면 얇은 판의 경우는 표준요소와 B-bar법을 이용한 고체요소는 느린 수렴성을 보인 반면 EAS요소의 경우는 매우 빠른 수렴성을 보였다. 특히 고차의 주파수대일수록 EAS요소를 제외한 다른요소는 수렴성이 좋지 않았다.

3.2 원판

정해가 존재하는 원의 둘레가 고정된 판을 이용하여 고체요소의 성능을 비교하였다. 자유진동해석에는 판의 전체를 이용하였으며 전체 944개의 8절점 고체요소를 이용하여 판을 이산화하였다. 해석에는 한 가지의 두께/지름비($h/2r = 0.01$)를 이용하였다. 해석결과는

다음의 주파수 매개변수를 이용하여 정리하였다.

$$\Omega_n = \omega_n R^2 (\rho h / D)^{\frac{1}{2}}$$

여기서 R 은 원판의 반지름을 나타내고 ρ 는 재료의 밀도, $D = Eh^3 / 12(1 + \nu^2)$ 는 휨 강성계수, E 는 탄성계수 그리고 $\nu = 0.3$ 는 프와송비를 나타낸다. 본 연구에서 도출된 해석결과는 정해와 가변형도를 채용한 9절점 판 요소로 계산한 유한요소해석 참고해와 비교하여 표 1에 나타내었다. 해석결과로부터 EAS요소는 표준 그리고 B-bar법에 의해 개발된 고체요소에 비해 정해에 매우 가까운 값을 도출하였다.

5. 결론

이 연구에서는 표준, B-bar법 그리고 EAS법을 이용하여 유도한 변형률-변위관계식에 따라 고체요소를 개발하고 이들을 판 구조물의 자유진동해석에 적용하였다. 자유진동해석을 통하여 EAS법을 도입한 고체요소는 표준요소와 B-bar법을 이용하여 개발한 고체요소에 비해 수렴성이 뛰어났으며 원판의 경우 고체요소에서 나타나는 해의 불안정 현상이 현저히 적었다. 판과 셸 요소에 비해서 휨 거동에 대한 표현이 다소 부자연스럽기는 하나 최근에 제시된 EAS법은 타 고체요소에 비해 우수한 결과를 나타내었다.

감사의 말

본 연구는 한국과학기술부의 원자력 중장기연구개발 사업의 일환으로 수행되었음.

참고문헌

- [1] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M, Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 3, pp. 275-290, 1971
- [2] T. Belytschko, Correction of article by O.P. Flanagan and T. Belytschko, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 19, pp. 467-468, 1983
- [3] Hughes, T.J.R., The finite element method – Linear static and dynamic finite element analysis, Prentice-Hall, 1987
- [4] Simo, J.C. and Armero, F., Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 33, pp. 1413-1449, 1992
- [5] Lee, S.J. and Han, S.E., Free vibration analysis of plates and shells with a nine-node assumed strain natural degenerated shell element, *J. of Sound and Vibration*, Vol. 241, pp. 605-633, 2001

표 1 원판의 자유진동해석결과

n	AS	ANS9	Standard	B-bar	EAS
1	10.2158	10.2129	20.4089	18.2849	10.2430
2	21.2600	21.2311	38.4694	33.5396	21.3173
-	-	-	39.1736	34.35317	21.3225
3	34.8800	34.7816	59.5732	50.9024	34.9376
-	-	34.7915	64.4696	56.7168	35.0113
4	39.7710	39.6766	72.6753	63.8106	39.8784
-	-	-	-	-	-
5	51.0400	50.8348	90.6452	78.5596	51.1796
-	-	-	91.5568	79.7281	51.1916
6	60.8200	60.6761	107.933	94.2641	60.9704
-	-	-	110.146	96.8500	61.0070
7	69.6659	69.3028	126.882	111.315	69.9149
-	-	69.3379	128.909	114.035	69.9497
8	84.5800	84.2999	141.987	121.677	84.6272
-	-	84.3835	150.240	131.306	84.9056
9	111.010	88.9848	160.173	140.982	89.4067
-	-	-	-	-	-
10	140.108	90.2078	171.097	152.320	91.2074
-	-	-	171.707	153.021	91.2110
11	-	110.563	184.288	157.538	111.137
-	-	-	186.191	159.808	111.178
12	-	113.489	209.722	183.472	115.014
-	-	113.502	215.376	190.060	115.049
13	-	119.848	221.061	193.626	120.384
-	-	-	222.022	198.213	120.525
14	-	139.222	228.209	200.151	140.069
-	-	-	232.701	200.473	140.175
15	-	139.228	254.332	219.593	141.431
-	-	139.376	271.374	238.131	141.441