2003 추계학술발표회 논문집
한국원자력학회

SAAF 중성자 수송 방정식의 해법

Solutions of SAAF Neutron Transport Equations

노 태 완
홍익대학교
서울 마포구 상수동 72-1

요 약

최근 새로운 2계 자기수반형(self-adjoint) 중성자 수송방정식으로 기존의 우성 및 기성 수송방정식 외에 SAAF (Self-Adjoint Angular Flux) 수송방정식이 소개되어, 이에 대한 적절한 경계조건, 수치해법, 정확도 등에 관한 논의가 활발히 진행되고 있다. 본 연구에서는 SAAF 수송방정식의 수학적, 물리적 의미를 고찰하고 기존의 우성 및 기성 수송방정식과의 관련성을 명확히 하였으며, Boltmann 수송방정식을 나타내는 두 개의 1계 차분식으로부터 2계의 SAAF 차분식을 유도하는 방법을 확산 가속법(diffusion synthetic acceleration)과 함께 소개하였다. 유도된 SAAF 차분법이 계산 효율성과 수송해의 정확도를 증가시킴을 수치결과로 보였다.

Abstract

Conventionally, the second-order self-adjoint transport equations have been studied using the even parity and the odd parity equations. Recently, however, the SAAF (self-adjoint angular flux) form of neutron transport equation has been introduced as a new option for the second-order self-adjoint equations. In this paper we validated the SAAF equation mathematically and clarified how it relates with the existing even and odd parity equations. we also developed a second-order SAAF differencing formula including DSA(diffusion synthetic acceleration) from two first-order difference equations. Numerical result is attached to show that the proposed methods increases accuracy with effective computational effort.

1. 서론

중성자의 매질 내에서의 거동을 기술하기 위해 전통적으로는 1계 미분방정식의 형태를 갖는 Boltzmann 수송식이 주로 사용되어 왔으나 최근에는 컴퓨터 하드웨어 및 병렬처리 기법의 발달로 대규모 행렬계산이 용이해 짐에 따라 보다 수치적 안정성을 갖는 2계, 자기수반형 수송식의 해법에 많은 관심과 연구가 집중되고 있다.[1-3] 2계 자기수반형 수송식에는 크게 우성 수송식(even-parity transport equation)과 기성 수송식(odd-parity transport equation)이 있는데, 이제까지는 중성자속(scalar flux) 계산의 편리함 때문에 주로 우성 수송식에 대해 연구가 집중되어 왔다. 참고문헌 [4]에서는 우성 및 기성 수송식을 사용하여 중성자속을 용이하게 계산할 수 있는 방법을 확산 가속법(diffusion synthetic acceleration: DSA)과 함께 소개하였다.

최근 또 다른 2계 수송식의 하나로 방향속(angular flux) 자체를 미지수로 갖는 SAAF (Self-Adjoint Angular Flux) 방정식이 소개되었고[5], 이에 따라 SAAF와 기존 우성 및 기성 수송식에 대한 관련성, 계산의 정확도 및 SAAF에 적절한 경계 조건 설정 등이 주요한 이슈로 등장하고 있다.[5-6] 미국의 Los Alamos National Laboratory에서도 중성자 수송 및 열복사 계산 관련 코드에 이미 SAAF를 포함한 2계 수송식을 사용하고 있으며 이를 바탕으로 한 코드 재구축 움직임도 활발히 진행되고 있다.[7]

본 연구에서는 SAAF 수송방정식의 수학적, 물리적 의미를 고찰하고 기존의 우성 및 기성 수송방정식과의 관련성을 명확히 하였으며, 수송방정식을 나타내는 두 개의 1계 차분식으로부터 2계의 SAAF 차분식을 유도하고, 계산방법을 수치해와 함께 보이며, 해의 가속을 위한 확산 가속법도 소개한다.

2. SAAF 수송식과 경계조건

2.1 중성자 수송식(neutron transport equation)

시간 비종속(time independent), 1계 Boltzmann 중성자 수송식은

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi + \sigma \psi = S\psi + Q \tag{1}$$

으로 나타나는데, 여기서, ψ는 중성자 방향속(neutron angular flux)이며 $\hat{\Omega}$는 방향변수, S와 Q는 각각 산란(scattering)과 중성자원(neutron source)를 나타내는 연산자이다.

여기서는 수송 방정식의 경계조건(boundary conditions)으로 방향속에 대한 기지유입조건(known incoming condition)과 반사조건(reflective condition)을 다룬다. 중성자 거동을 기술하는데 편리하게 사용되는 기타의 경계조건도 유사한 방법으로 해석될 수 있다.

기지유입조건은 매질의 외부에서 유입되는 방향속의 방향별 크기를 나타낸다. 따라서, 경계 Γ에서의 기지유입조건은

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = f(\hat{\Omega}), \quad (\vec{r} \in \Gamma, \quad \hat{\Omega} \cdot \hat{n} < 0) \tag{2}$$

로 표시된다. 여기서 $\hat{n}$은 경계에서의 바깥 방향 법선벡터(outward normal vector)이다. 물론 $f(\hat{\Omega}) = 0$일 때 외부로부터 유입이 없는 진공조건(vacuum condition)이 된다.

반사조건은 경계에서의 거울반사(mirror reflection)를 나타내며,

$$\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}'), \quad (\vec{r} \in \Gamma, \quad (\hat{\Omega} \times \hat{\Omega}') \cdot \hat{n} = 0) \tag{3}$$

로 나타낸다. 여기서 $\hat{\Omega}$는 중성자의 입사방향(incidence angle)을 $\hat{\Omega}'$는 중성자의 반사방향(reflection angle)을 나타낸다.

2.2 SAAF 중성자 수송식

SAAF 중성자 수송식을 한마디로 소개하면 방향 중성자속(neutron angular flux) 자체를 미지함수로 갖는 자기수반형 2계 수송방정식이라 할 수 있다. 이는 기성 및 우성 수송방정식과 같은 기존의 자기수

반형 2계 수송방정식이 각각 미지함수로 우성 방향속(even-parity angular flux)과 기성 방향속(odd-parity angular flux)을 갖는 것과 대조된다. 식(1)의 1계 수송식을 ψ에 대하여 풀면

$$\psi = -(\sigma - S)^{-1}\hat{\Omega}\cdot\nabla\psi + (\sigma - S)^{-1}Q \tag{4}$$

이고, 식(4)를 식(1)의 1계 미분항(gradient)에 대입하면

$$-\hat{\Omega}\cdot\nabla(\sigma - S)^{-1}\hat{\Omega}\cdot\nabla\psi + (\sigma - S)\psi = Q - \hat{\Omega}\cdot(\sigma - S)Q \tag{5}$$

이 되는데, 이를 SAAF (self-adjoint angular flux) 수송방정식이라고 부른다. SAAF 수송방정식은 식(1)의 Boltzmann 수송식과 같이 방향 중성자속을 미지함수로 가지면서도 형태가 2계이고, 우성 및 r성 수송식과는 달리 방정식의 미지함수 자체가 방향 중성자속이므로 1계 Boltzmann 수송식에 적용되는 식(2)와 식(3)의 경계조건이 그대로 적용될 수 있는 특징을 갖는다. 여기서 주의할 점은 SAAF 수송식을 풀기 위해서는 SAAF 수송방정식이 2계 미분으로 나타나므로 식(4) 또한 경계에서도 성립한다는 추가적인 조건이 요구된다는 것이다. SAAF 수송방정식의 다른 특징은 참고문헌[5]에 상세히 기술되어 있다.

위와 같이 유도된 식(5)의 SAAF 수송식이 과연 수학적으로 타당성을 가질 수 있는지에 대해 의문이 있을 수 있다. 예를 들어, 초기값 문제 $y' - y = 0$, $y(0) = 1$을 생각하자. 이의 해는 $y = e^x$이다. 이 문제에 대해 SAAF 수송방정식을 유도할 때와 같은 방법을 적용해 보자. 주어진 미분방정식을 y에 대해 풀면 $y = y'$이 되는데 이를 다시 원래 미분방정식의 1계 미분항에 대입하여 2계 미분방정식 $y'' - y = 0$을 얻을 수 있으며 이의 일반해는 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$이다. 상수 c_1, c_2를 결정하기 위해서는 주어진 초기조건 $y(0) = 1$ 이외에 또 다른 추가의 조건이 필요한데 이는 2계 미분방정식을 유도하기 위해 사용했던 $y = y'$으로부터 $y(0) = y'(0)$을 사용한다. 이러한 두 조건을 사용하면 2계 미분방정식에 대한 초기값 문제의 해는 본래의 1계 미분방정식에 대한 초기값 문제의 해와 같은 $y = e^x$을 얻을 수 있다. 이는 SAAF 수송방정식과 이의 해에 대한 타당성을 제공하는 예이다.

3. SAAF 중성자 수송식의 차분

식(1)의 Boltzmann 수송식을 1차원 S_N, 등방산란(isotropic scattering) 및 등방 중성자원(isotropic source), 내에너지 그룹(within energy group)을 가정하여 다시 쓰면

$$\mu_m \frac{\partial \psi_m^{l+1/2}}{\partial x} + \sigma\psi_m^{l+1/2} = \sigma_s \phi^l + Q \tag{6}$$

로 단순해진다. 여기서, $m = 1, 2, \cdots, M$은 차분 방향(discrete direction), l은 반복계산 단계를 나타내는 지표이다. ϕ는 중성자속(neuton scalar flux)으로 방향중성자속에 대해

$$\phi^{l+1/2} = \sum_{m=1}^{M} \omega_m \psi_m^{l+1/2} \tag{7}$$

로 정의된다. 여기에서는 식(6)의 1계 미분방정식에 대한 차분식을 먼저 유도하고 이 차분식을 이용해 2계의 SAAF 차분식을 유도하는 과정을 보인다.

차분을 위한 격자(cell) 구조를 x의 정수 표시는 각 격자의 중심(center)을 나타내고 x의 반정수 표시는 각 격자의 끝점(vertex or edge)을 나타내도록 그림 1과 같이 정한다. 물질의 속성인 σ_i, $\sigma_{s,i}$, Q_i는 격자의 내부에서 일정한 값으로 정의되고 미지함수인 ψ_m과 ϕ는 격자의 중앙과 끝점에서 모두 정의된다.

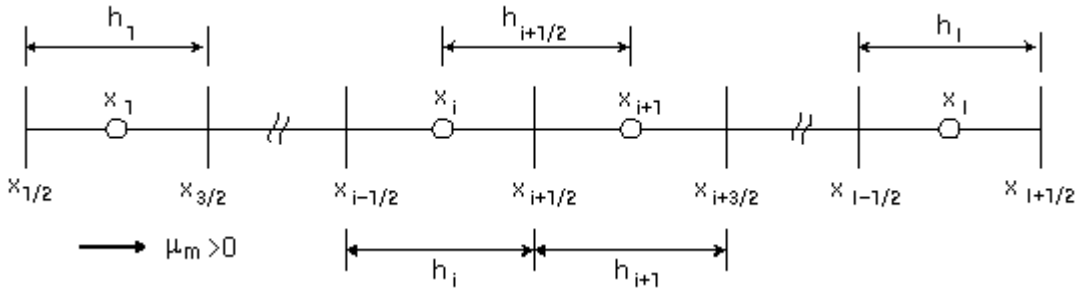

그림 1 격자(cell) 구조

식(6)을 구간 $[x_i, x_{i+1}]$에 대해 적분하면

$$\mu_m(\psi_{m,i+1}^{l+1/2} - \psi_{m,i}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2} = \sigma_{s,i+1/2}h_{i+1/2}\phi_{i+1/2}^{l} + Q_{i+1/2}h_{i+1/2} \tag{8}$$

이고, 식(6)을 또 다시 구간 $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$에 대해 적분하면

$$\mu_m(\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \psi_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_i h_i \psi_{m,i}^{l+1/2} = \sigma_{s,i}h_i\phi_i^l + Q_i h_i \tag{9}$$

이다. 여기서,

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}\ ,\quad \sigma_{i+1/2} = \frac{\sigma_i h_i + \sigma_{i+1}h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}\ ,\quad Q_{i+1/2} = \frac{Q_i h_i + Q_{i+1}h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \tag{10}$$

이다. 식(9)를 $\psi_{m,i}^{l+1/2}$에 대해 풀어 **격자 중앙에서의 SAAF 수송식**(cell-center SAAF transport equation)

$$\psi_{m,i}^{l+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_i h_i}(\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \psi_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{\sigma_i}(\sigma_{s,i}\phi_i^l + Q_i) \tag{11}$$

을 구하고, 식(11)을 식(8)의 $\psi_{m,i}^{l+1/2}$, $\psi_{m,i+1}^{l+1/2}$에 대입하여 **격자 모서리에서의 SAAF 수송식**(cell-vertex SAAF transport equation)

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1}h_{i+1}}(\psi_{m,i+3/2}^{l+1/2} - \psi_{m,i+1/2}^{l+1/2}) + \frac{\mu_m^2}{\sigma_i h_i}(\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2} - \psi_{m,i-1/2}^{l+1/2}) + \sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2}$$

$$= \sigma_{s,i+1/2}h_{i+1/2}\phi_{i+1/2}^{l} + Q_{i+1/2}h_{i+1/2} - \mu_m\left(\frac{\sigma_{s,i+1}\phi_{i+1}^l + Q_{i+1}}{\sigma_{i+1}} - \frac{\sigma_{s,i}\phi_i^l + Q_i}{\sigma_i}\right) \tag{12}$$

을 유도한다. 식(12)를 보면 좌변의 격자 모서리에서 정의되는 방향 중성자속이 미지함수이고 이들의 관계가 격자의 모서리와 중앙에 위치한 중성자속 $\phi_{i+1/2}$, ϕ_i, ϕ_{i+1}로 나타남을 알 수 있다. 격자 중앙에서의 중성자속 ϕ_i와 ϕ_{i+1}의 계산을 위해서는 식(11)의 양변을 적분하는 절차도 필요하다.

왼쪽 경계에서의 차분식을 유도하기 위해서 왼쪽 경계에서의 방향중속자속을 $\psi_{m,L}$라 하고 먼저 식(6)을 구간 $[x_{1/2}, x_1]$에 대해 적분하면

$$\mu_m(\psi_{m,1}^{l+1/2} - \psi_{m,L}^{l+1/2}) + \sigma_{1/2}h_{1/2}\psi_{m,1/2}^{l+1/2} = \sigma_{s,1/2}h_{1/2}\phi_{1/2}^{l} + Q_{1/2}h_{1/2} \tag{13}$$

이 되고, 식(11)을 $i=1$에 대하여 적용한 식

$$\psi_{m,1}^{l+1/2} = -\frac{\mu_m}{\sigma_1 h_1}(\psi_{m,3/2}^{l+1/2} - \psi_{m,1/2}^{l+1/2}) + \frac{1}{\sigma_1}(\sigma_{s,1}\phi_1^l + Q_1) \tag{14}$$

를 식(13)에 대입하면 왼쪽 경계에 대한 SAAF 차분식

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma_1 h_1}\left(\psi_{m,3/2}^{l+1/2}-\psi_{m,1/2}^{l+1/2}\right)+\sigma_{1/2}h_{1/2}\psi_{m,1/2}^{l+1/2}-\mu_m\psi_{m,L}$$

$$=\sigma_{s,1/2}h_{1/2}\phi_{1/2}^{l}+Q_{1/2}h_{1/2}-\mu_m\left(\frac{\sigma_{s,1}\phi_1^l+Q_1}{\sigma_1}\right) \tag{15}$$

을 구한다. 여기서 $\psi_{m,L}$은 방향에 따라 달라지는데 $\mu_m>0$인 경우는 $\psi_{m,L}=f_{m,L}$로 왼쪽 경계에서 유입되는 값을 사용하며, $\mu_m<0$인 경우는 $\psi_{m,L}=\psi_{m,1/2}$로 구해야 할 미지값이다. 한편, $f_{m,L}$은 기지 유입조건인 경우는 주어진 유입값을 그대로 사용하고 반사조건인 경우는 이미 계산된 반사 방향 $m'(=M-m+1)$의 중성자속 $\psi_{m',1/2}$을 사용해야 한다.

마찬가지로 오른쪽 경계에서의 방향중속자속을 $\psi_{m,R}$로 놓으면 오른쪽 경계에서의 SAAF 차분식

$$\frac{\mu_m^2}{\sigma_I h_I}\left(\psi_{m,I+1/2}^{l+1/2}-\psi_{m,I-1/2}^{l+1/2}\right)+\sigma_{I+1/2}h_{I+1/2}\psi_{m,I+1/2}^{l+1/2}+\mu_m\psi_{m,R}$$

$$=\sigma_{s,I+1/2}h_{I+1/2}\phi_{I+1/2}^{l}+Q_{I+1/2}h_{I+1/2}+\mu_m\left(\frac{\sigma_{s,I}\phi_I^l+Q_I}{\sigma_I}\right) \tag{16}$$

을 구할 수 있다. 여기에서도 $\psi_{m,R}$은 방향에 따라 달라지는데 $\mu_m<0$인 경우는 $\psi_{m,R}=f_{m,R}$로 오른쪽 경계에서 유입되는 값을 사용하며, $\mu_m>0$인 경우는 $\psi_{m,R}=\psi_{m,I+1/2}$로 구해야 할 미지값이다. 마찬가지로, $f_{m,R}$은 기지유입조건인 경우는 경계조건으로 주어진 유입값을 그대로 사용하고 반사조건인 경우는 이미 계산된 반사 방향의 중성자속 $\psi_{m',I+1/2}$을 사용해야 한다.

4. SAAF 확산가속법

SAAF 수송식에 대한 확산 가속식을 구하기 위해 $\psi_m^{l+1/2}=\phi^{l+1/2}+3\mu_m J^{l+1/2}$와 같이 방향속을 P_1-근사하고 이를 식(12)에 대입하여 방향에 대해 적분하여($\sum_{m=1}^{M}\omega_m$:)

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}\left(\phi_{i+3/2}^{l+1/2}-\phi_{i+1/2}^{l+1/2}\right)+\frac{1}{3\sigma_i h_i}\left(\phi_{i+1/2}^{l+1/2}-\phi_{i-1/2}^{l+1/2}\right)+\sigma_{i+1/2}h_{i+1/2}\phi_{i+1/2}^{l+1/2}$$

$$=\sigma_{s,i+1/2}h_{i+1/2}\phi_{i+1/2}^{l}+Q_{i+1/2}h_{i+1/2} \tag{17}$$

을 얻는다. 여기서, $\sum_{m=1}^{M}\omega_m=1$, $\sum_{m=1}^{M}\omega_m\mu_m=0$, $\sum_{m=1}^{M}\omega_m\mu_m^2=1/3$이다. 거시흡수단면적이 $\sigma_a=\sigma-\sigma_s$일 때, 식(17)에 대응하는 확산 방정식(diffusion equation)을

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}\left(\phi_{i+3/2}^{l+1}-\phi_{i+1/2}^{l+1}\right)+\frac{1}{3\sigma_i h_i}\left(\phi_{i+1/2}^{l+1}-\phi_{i-1/2}^{l+1}\right)+\sigma_{a,i+1/2}h_{i+1/2}\phi_{i+1/2}^{l+1}=Q_{i+1/2}h_{i+1/2} \tag{18}$$

로 정의하고, 식(18)에서 식(17)을 빼면 **격자 모서리에서의 SAAF 확산 가속식**

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1}h_{i+1}}\left(\varepsilon_{i+3/2}^{l+1}-\varepsilon_{i+1/2}^{l+1}\right)+\frac{1}{3\sigma_i h_i}\left(\varepsilon_{i+1/2}^{l+1}-\varepsilon_{i-1/2}^{l+1}\right)+\sigma_{a,i+1/2}h_{i+1/2}\varepsilon_{i+1/2}^{l+1}$$

$$=\sigma_{s,i+1/2}h_{i+1/2}\left(\phi_{i+1/2}^{l+1/2}-\phi_{i+1/2}^{l}\right) \tag{19}$$

을 얻는다. 여기서, $\varepsilon_{i+1/2}^{l+1}$ ($i=0,1,\cdots I$)은 $l+1$ 반복계산 단계의 격자 모서리에서의 중성자속 오차

$$\varepsilon_{i+1/2}^{l+1} = \phi_{i+1/2}^{l+1} - \phi_{i+1/2}^{l+1/2} \tag{20}$$

이고, $l+1/2$ 단계의 중성자속은 정의에 의해

$$\phi^{l+1/2} = \sum_{m=1}^{M} \omega_m \psi_m^{l+1/2} \tag{21}$$

로 계산한다. 양쪽 경계에 대해서도 식(19)와 같은 확산 가속식이 필요하다. SAAF 수송식의 경계식인 식(15)와 식(16)에 대하여 유사한 방법을 적용하면 왼쪽 경계와 오른쪽 경계에서의 확산 가속식은 각각

$$-\frac{1}{3\sigma_1 h_1}\left(\varepsilon_{3/2}^{l+1} - \varepsilon_{1/2}^{l+1}\right) + \sigma_{a,1/2} h_{1/2} \varepsilon_{1/2}^{l+1} + \alpha_v \varepsilon_{1/2}^{l+1} = \sigma_{s,1/2} h_{1/2}\left(\phi_{1/2}^{l+1/2} - \phi_{1/2}^{l}\right) \tag{22}$$

과

$$\frac{1}{3\sigma_I h_I}\left(\varepsilon_{I+1/2}^{l+1} - \varepsilon_{I-1/2}^{l+1}\right) + \sigma_{a,I+1/2} h_{I+1/2} \varepsilon_{I+1/2}^{l+1} + \alpha_v \varepsilon_{I+1/2}^{l+1}$$

$$= \sigma_{s,I+1/2} h_{I+1/2}\left(\phi_{I+1/2}^{l+1/2} - \phi_{I+1/2}^{l}\right) \tag{23}$$

이 된다. 여기서, $m = 1, 2, \cdots, M/2$ 을 양의 방향, $m = M/2+1, \cdots, M$ 을 음의 방향이라 할 때, 경계조건이 기지유입조건이면 $\alpha_v = \sum_{m=1}^{M/2} \omega_m \mu_m$ 이고, 반사조건이면 $\alpha_v = 0$ 이다.

식(12)에서 보듯이 SAAF 수송식을 풀기 위해서는 격자 중앙에서의 확산 가속도 요구되는데, 식(11)로 나타나는 격자 중앙에서의 SAAF 수송식 자체로 격자 중앙에서의 확산 근사식을 유도하는 것이 불가능하다. 따라서, 참고문헌[4]에서 기성 수송식에 대해 소개한 바와 같이 격자 중앙에서 정의되는 방향속을 미지수로 갖는 또 다른 수송식을 먼저 유도해야 한다. 즉, 식(8)과 식(9)로부터 격자 양단에 대한 SAAF 차분식을 유도할 때와는 달리 격자 중앙에 대한 2계 차분식을 먼저 유도하고, 이를 이용해 해당 확산 가속식을 구하는 것이 요령이다. 이를 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

식(8)을 $\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2}$ 에 대해 풀고, 이를 식(9)에 대입하면 격자 중앙에서 정의되는 2계 차분식

$$-\frac{\mu_m^2}{\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}}\left(\psi_{m,i+1}^{l+1/2} - \psi_{m,i}^{l+1/2}\right) + \frac{\mu_m^2}{\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}}\left(\psi_{m,i}^{l+1/2} - \psi_{m,i-1}^{l+1/2}\right) + \sigma_i h_i \psi_{m,i}^{l+1/2}$$

$$= \sigma_{s,i} h_i \phi_i^l + Q_i h_i - \mu_m\left(\frac{\sigma_{s,i+1/2}\phi_{i+1/2}^l + Q_{i+1/2}}{\sigma_{i+1/2}} - \frac{\sigma_{s,i-1/2}\phi_{i-1/2}^l + Q_{i-1/2}}{\sigma_{i-1/2}}\right) \tag{24}$$

을 얻는다. 확산 가속식을 구하기 위해 마찬가지로 $\psi_m^{l+1/2} = \phi^{l+1/2} + 3\mu_m J^{l+1/2}$ 로 P_1-근사하고 식(24)를 방향에 대해 적분하면

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}}\left(\phi_{i+1}^{l+1/2} - \phi_i^{l+1/2}\right) + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}}\left(\phi_i^{l+1/2} - \phi_{i-1}^{l+1/2}\right)$$

$$+ \sigma_i h_i \phi_i^{l+1/2} = \sigma_{s,i} h_i \phi_i^l + Q_i h_i \tag{25}$$

이다. 식(25)에 대응하는 확산 방정식을

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}}\left(\phi_{i+1}^{l+1} - \phi_i^{l+1}\right) + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}}\left(\phi_i^{l+1} - \phi_{i-1}^{l+1}\right) + \sigma_{a,i} h_i \phi_i^{l+1} = Q_i h_i \tag{26}$$

로 정의하고, 식(26)에서 식(25)를 빼면 **격자 중앙에서의 SAAF 확산 가속식**

$$-\frac{1}{3\sigma_{i+1/2} h_{i+1/2}}\left(\varepsilon_{i+1}^{l+1} - \varepsilon_i^{l+1}\right) + \frac{1}{3\sigma_{i-1/2} h_{i-1/2}}\left(\varepsilon_i^{l+1} - \varepsilon_{i-1}^{l+1}\right) + \sigma_{a,i} h_i \varepsilon_i^{l+1}$$

$$= \sigma_{s,i} h_i \left(\phi_i^{l+1/2} - \phi_i^l \right) \tag{27}$$

을 얻는다. 유사한 방법으로 왼쪽 경계와 오른쪽 경계에서의 확산 가속식은 각각

$$-\frac{1}{3\sigma_{3/2} h_{3/2}} \left(\varepsilon_2^{l+1} - \varepsilon_1^{l+1} \right) + \sigma_{a,1} h_1 \varepsilon_1^{l+1} + \alpha_{c,L} \varepsilon_1^{l+1} = \sigma_{s,1} h_1 \left(\phi_1^{l+1/2} - \phi_1^l \right) \tag{28}$$

$$\frac{1}{3\sigma_{I-1/2} h_{I-1/2}} \left(\varepsilon_I^{l+1} - \varepsilon_{I-1}^{l+1} \right) + \sigma_{a,I} h_I \varepsilon_I^{l+1} + \alpha_{c,R} \varepsilon_I^{l+1} = \sigma_{s,I} h_I \left(\phi_I^{l+1/2} - \phi_I^l \right) \tag{29}$$

이 된다. 여기서 $\alpha_{c,L} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\omega_m \mu_m^2 f_{m,L}}{\mu_m + \sigma_1 h_1 / 2}$, $\alpha_{c,R} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\omega_m \mu_m^2 f_{m,R}}{\mu_m + \sigma_I h_I / 2}$ 이고, ε_i^{l+1}은 $l+1$ 반복계산 단계에서 격자 중앙에서의 중성자속 오차

$$\varepsilon_i^{l+1} = \phi_i^{l+1} - \phi_i^{l+1/2} \tag{30}$$

이다. 확산 가속이 포함된 SAAF 수송식의 계산 절차는 다음과 같다.

(i) 각 차분방향에 대해 격자 모서리에서의 SAAF 수송식[식(12), (15), (16)]을 풀어 $\psi_{m,i+1/2}^{l+1/2}$ ($i = 0, 1, \cdots, I$)을 계산한다.

(ii) 각 차분방향에 대해 격자 중앙에서의 SAAF 수송식[식(11)]을 풀어 $\psi_{m,i}^{l+1/2}$ ($i = 1, 2, \cdots, I$)을 계산한다.

(iii) 식(21)을 사용하여 격자 중앙과 모서리에서의 중성자속 $\phi^{l+1/2}$을 계산한다.

(iv) 격자 모서리에 대한 확산 가속식[식(19),(22),(23)]을 풀어 $\varepsilon_{i+1/2}^{l+1}$를 계산한다.

(v) 격자 중앙에 대한 확산 가속식[식(27),(28),(29)]을 풀어 ε_i^{l+1}를 계산한다.

(vi) 식(2)과 식(30)을 사용하여 ϕ^{l+1}의 값을 개선한다.

(vii) ϕ^{l+1}의 값이 수렴할 때까지 (i)-(vi) 단계를 반복한다.

식(11)에서 보듯이 SAAF 계산에서는 각각의 차분방향에 대하여 격자 중앙에 대한 행렬계산이 불필요하다. 따라서, 식(12)를 풀기 위한 한번의 행렬계산으로 격자 중앙과 격자 모서리의 방향속을 한꺼번에 얻을 수 있다. 이는 동일한 행렬계산에 대해 격자 모서리에서의 값만을 제공하는 우성 수송식이나 격자 중앙에서의 값만을 제공하는 기성 수송식에 비하여 SAAF 수송계산이 해의 정확도와 효율성을 높이는 이유가 된다. 물론 격자 중앙과 모서리에 대해 각각 다른 확산 가속식을 풀어야 하는 단점이 있지만 이는 각 차분 방향에 대한 계산이 아니므로 계산량은 비교적 작다.

5. 수치계산 및 결과

앞에서 언급한 SAAF 수송계산 모형을 해당 확산 가속법과 함께 프로그램화 하여 실제 수치 문제에 적용하고 그 계산 결과를 확인하였다. 대상 문제는 참고문헌[5]에 소개된 것으로 전체 길이가 1 cm이고 $\sigma = 2\ \text{cm}^{-1}$, $\sigma_s = 1\ \text{cm}^{-1}$, $Q = 1\ \text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$이며, 왼쪽과 오른쪽이 모두 진공조건을 갖는 1차원 등산란, 균질매질 문제이다. 여기에서는 본문에서 보인 SAAF 수송식의 기지유입조건과 반사조건식을 검증하기 위하여 오른쪽 0.5 cm 지점에 반사조건을 두어 문제의 영역을 반으로 줄여 계산하였다. 격자 간격은 0.05cm를 사용하였고 S_2 방향차분 계산을 수행하였는데 S_2 계산의 경우는 Mark 경계조건을 갖는 P_1 방정식과 동일하여 중성자속에 대한 해석해를 구할 수 있는데, 이는 참고문헌[5]에

$$\phi(x) = 1 - \frac{\exp[\sqrt{6}(1-x)] + \exp[\sqrt{6}x]}{1 - 1/\sqrt{2} + (1 + 1/\sqrt{2})\exp[\sqrt{6}]}$$

로 소개되었다. 계산 결과는 그림 2와 표 1에 나타나는데 SAAF 수송식을 사용하여 구한 해를 우성 및 기성 수송식을 사용하여 구한 해와 함께 나타내었다. SAAF의 계산 결과는 격자 중앙(c)과 격자 모서리(v)로 구분하고 이들의 평균값도 나타내었다. 구해진 모든 중성자속의 수치해가 해석해에 잘 근접함을 알 수 있지만 SAAF의 평균값이 가장 정확하였다. 더 작은 격자 간격을 사용하면 더욱 정확한 결과를 보이겠지만, 본 연구의 목적이 개발된 SAAF 수송해법과 해당 확산가속법이 올바로 수행되고 있음을 확인하는 것이므로 더 이상의 수치 실험 결과는 보이지 않았다. 표 1에 의하면 SAAF의 S_2 계산에 있어서 확산 가속법의 반복계산 수가 정확히 1회이므로 이 역시 올바로 수행됨을 나타내고 있다.

6. 결론 및 추후 연구 내용

과거에는 2계 자기수반형의 중성자 수송식에 대한 연구가 주로 우성 수송식에 의존되어 왔다. 기성 수송식의 경우 기성 방향속에 의한 중성자속의 직접 계산이 불가능하고 이로 인해 적절한 확산 가속법 채택에 어려움이 있었기 때문이다. 최근 기성 수송식에 대해 안정된 확산 가속법이 개발되었고, 본 연구에서는 이를 기반으로 또 다른 형태의 자기수반형 중성자 수송식인 SAAF 수송식에 대한 해법도 개발하게 되었다. SAAF 수송식이 제안된 이후로 기존 우성 및 기성 수송식과의 관련성과 그 응용에 대한 관심이 높아지고 있는데, SAAF 수송식에 대한 해법을 명확히 한 본 연구는 앞으로의 SAAF 관련 연구에 기초가 될 것이며, 복사수송(radiative transfer) 계산 등에 응용 가능성이 높다.

참고문헌

1. E. E. Lewis and W. F. Miller, Jr., *Computational Methods of Neutron Transport*, John Wiley & Sons, 1984
2. M. L. Adams, "Even- and Odd-Parity Finite Element Transport Solutions in the Thick Diffusion Limit", *Proc. Int. Topl. Mtg.*, Pittsburgh, Pennsylvania, Vol. 5, ANS, 1991
3. Taewan Noh, W. F. Miller, Jr, and J. E. Morel, "The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equations in Two-Dimensional x-y Geometry", *Nucl. Sci. & Eng.*, **123**, 1996
4. 노태완, "우성 및 기성 중성자 수송방정식의 차분법(Differencing Methods for the Even- and Odd-Parity Neutron Transport Equations)", 2002 한국원자력학회 추계학술발표논문집, 용평리조트, 2002. 10. 24-25
5. J. E. Morel and J. M. McGhee, "A Self-Adjoint Angular Flux Equation", *Nucl. Sci. & Eng.*, **132,** 1999
6. C. J. Gesh, M. L. Adams, "Finite Element Solutions of Second-Order Forms of the Transport Equation at the Interface between Diffusive and Non-Diffusive regions", *Proceedings of ANS meeting*, Salt Lake City, Utah, September, 2001
7. Private Communications with J. E. Morel, et. al. at Los Alamos national Lab., 2002

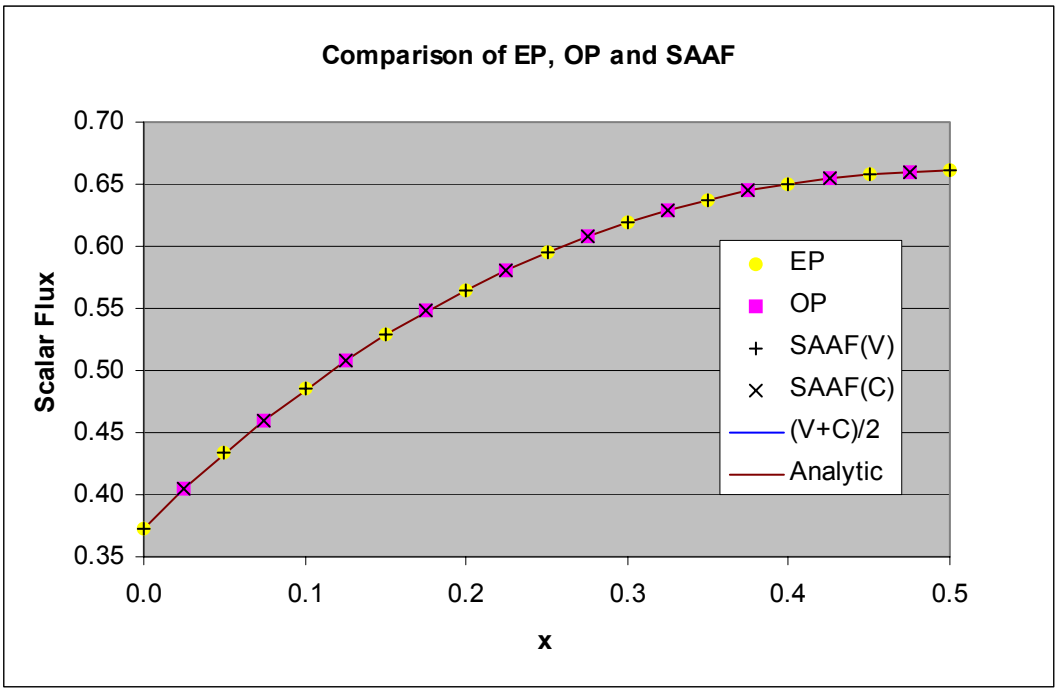

그림 2 우성(EP), 기성(OP) 및 SAAF 수송식으로 계산된 중성자속 비교

표 1 우성(EP), 기성(OP) 및 SAAF 수송식으로 계산된 중성자속 비교

x	EP	OP	SAAF(V)	SAAF(C)	(V+C)/2	Analytic
0.000	0.3733		0.3733			0.3729
0.025		0.4047		0.4047	0.4040	0.4041
0.050	0.4333		0.4333			0.4330
0.075		0.4603		0.4603	0.4597	0.4598
0.100	0.4847		0.4847			0.4845
0.125		0.5077		0.5077	0.5071	0.5073
0.150	0.5284		0.5284			0.5283
0.175		0.5478		0.5478	0.5473	0.5475
0.200	0.5651		0.5651			0.5650
0.225		0.5811		0.5811	0.5806	0.5809
0.250	0.5952		0.5952			0.5952
0.275		0.6082		0.6082	0.6077	0.6079
0.300	0.6193		0.6193			0.6193
0.325		0.6293		0.6293	0.6289	0.6291
0.350	0.6376		0.6376			0.6376
0.375		0.6449		0.6449	0.6445	0.6448
0.400	0.6505		0.6505			0.6506
0.425		0.6552		0.6552	0.6548	0.6550
0.450	0.6582		0.6582			0.6582
0.475		0.6603		0.6603	0.6599	0.6601
0.500	0.6608		0.6608			0.6608
Absorption Rate	**0.2845**	**0.2850**	**0.2845**	**0.2850**	**0.2847**	**0.2846**
No. of DSA	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**-**