

## 타원완화방정식의 길이스케일과 재분배항의 증폭

# Length Scale and the Amplification of the Redistribution Term of Elliptic Relaxation Equation

전건호, 황영동, 윤한영, 김희철, 지성균  
한국원자력연구소  
대전광역시 유성구 덕진동 150

### 요약

타원완화모형의 난류길이스케일과 재분배항의 증폭에 대한 조사가  $Re_\tau = 180, 390$  그리고  $590$  의 채널유동에서 조사되어졌다. 길이스케일은 타원완화연산자내 포함되어 있고 길이스케일의 증가는 타원연산자와 직접적으로 관련이 된다. 재분배항의 증폭을 조사하기 위하여, 경계조건에 영향을 받는 타원완화방정식의 효과에 대한 특성을 나타내는 새로운 증폭률  $\Gamma_{ij}$ 를 도입하였다. 재분배항의 증폭은 일반적으로 알려진 상관함수에 의한 영향보다도 길이스케일과 그것의 모형 상수에 더욱 강하여 영향을 받았다. 새로운 길이스케일과 재분배항의 증폭에 대하여 채널 유동에서 다양한 조사가 수행되었고 이 모형은 경계조건에 상관없이 증폭이 발생하지 않았다.

### Abstract

The elliptic relaxation model is investigated for the turbulent length scale and the amplification of redistribution term, which are tested in channel flow at  $Re_\tau = 180, 390$  and  $590$  DNS data. The length scale is included in elliptic relaxation operator and the increase of length scale is directly related with elliptic operator. To investigate the amplification of the redistribution term, the new amplification factor  $\Gamma_{ij}$  was introduced, which characterizes the effects of the elliptic relaxation equation with boundary condition. The amplification of the redistribution is strongly affected on length scale and its model constant rather than the correlation function which is generally known. Various comparative tests for both length scale and an amplification of redistribution term were conducted on the channel flow and present model became free of amplification regardless of boundary condition.

## 1. 서론

복잡한 3차원 유동 해석은 원자로 내에 증기발생기, 펌프, 노심 뿐만 아니라 기술의 집약체인 원자로 집합체 등에 적용이 늘어나고 있는 추세이다. 이들은 모두 난류유동을 수반하게 되며 이때 난류유동을 해석할 수 있는 모형이 필요하다. 대표적인 난류 모형으로 와점성계수 모형이 있다. 이 모형은 전산해석의 발전과 더불어 많은 변화를 추구하여왔다. 특히,  $k-\epsilon$  모형은 2차원 유동장 뿐만 아니라 3차원 유동장에서 일반적으로 가장 널리 사용되고 있는 모형이다. 그 이유는 많은 산업적응용에서 검증된 모형이며 또한 모형의 간단함과 안정성 때문이다. 그러나 전산기의 급격한 발전으로 유동 해석의 정확성이 절실히 요구되어 짐에 따라  $k-\epsilon$  모형이 가지는 모형의 한계성을 극복할 수 있는 모형이 요구되고 있다. 레이놀즈응력모형은 분명  $k-\epsilon$  모형이 가지는 문제점의 상당 부분을 극복할 수 있다. 이 모형은 재분배항에 대한 이론적이고 정확한 모형이 도입된다면 많은 산업적인 응용에  $k-\epsilon$  모형을 대체할 수 있는 모형으로 충분하다.

최근에 재분배항에 대한 타원완화기법이라는 새로운 접근 방법이 Durbin[1993]에 의하여 발표되었다. 타원완화기법은 레이놀즈방정식의 재분배항을 벽 까지 올바르게 수정할 수 있는 모형으로 평가되고 있다. 이것은 모형이 가지는 이론적 배경 뿐만 아니라 모형 내에 벽 감쇄함수를 사용하지 않기 때문에 더욱 매력적이다. 앞으로 많은 산업적응용에서 이 모형의 적용이 가속화 될 것으로 기대되는 것도 이런 이유에서 이다. Durbin의 타원완화기법이 이론적이고 3차원 유동장에 간단히 적용할 수 있는 모형임에 불구하고 아직 많은 연구가 되고 있는 것은 타원완화 연산자가 대수영역에서 만족스럽게 거동하지 않기 때문이다.

Durbin에 의하면 채널의 중앙에서 낮은 레이놀즈수 유동인 경우 채널의 중앙에서 유동방향 레이놀즈응력이 낮게 예측된다고 하였다. 그러나 그는 그 이유를 설명하지 못하였다. Wizman 등[1996]은 대수영역에서 타원완화 연산자의 잘 못된 거동은 재분배항의 증폭 때문이라고 하였다. 그들은 타원완화 연산자가 대수영역에서 증폭되지 않는 중립 모형을 제안하였다. Manceau 등[2001]은 DNS 결과를 이용한 조사에서 벽 근방의 상관함수가 비대칭적으로 거동한다는 것을 보였다. 그들은 벽 근방의 강한 비대칭성은 Durbin의 상관함수로 설명할 수 없다고 하였다. 그들은 타원완화연산자로 인한 증폭을 제거하기 위해 비대칭 상관함수를 모형하고 이를 이용하여 새로운 타원완화방정식을 제안하였는데 이것은 대수영역에서 이론적으로 증폭이 발생하지 않는다고 기술하였다. 그러나 Manceau 등의 모형은 Wizman 등의 모형이나 Laurence & Durbin [1994]의 모형에 비하여 실제 응용에서 향상된 결과를 보이지 못하였다.

이와 같은 것이 연구의 동기이며, 타원완화기법에서 발생하는 타원완화방정식의 증폭에 대한 직접적인 원인을 조사하는 것이 연구 목적이다. 본 연구의 접근방법은 방정식의 원천항, 길이스케일, 시간스케일 등 종속변수를 제외한 모든 성분에 대하여 DNS 값을 사용한다. 또한 경계조건이 주어진 경우, 증폭 정도를 조사하고 증폭을 피할 수 있는 방법을 길이스케일과 타원완화 연산자를 통하여 제시하는 것이다.

## 2. 타원완화모형

타원완화방정식을 평가하기 위하여 사용한 비압축성 유동에서 운동량방정식과 Durbin이 제안한 레이놀즈응력방정식은 다음과 같다.

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad (1)$$

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + F_{ij} + D_{ij}^v + D_{ij}^t - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon \quad (2)$$

$$F_{ij} = \Pi_{ij} - D_{ij}^t - \epsilon_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon \quad (3)$$

여기서  $F_{ij}$ 에 대한 모형은  $\Pi_{ij}$ 에 대하여 모형하는 것으로 종결될 수 있다.  $F_{ij}$  내에 포함되어 있는 재분배항은 다음과 같은 식으로부터 시작된다.

$$\rho \Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right) \quad (4)$$

요동압력에 의해 만족되는 포아송방정식의 적분해를 사용함으로써, 재분배항은 다음과 같이 표현된다.

$$\rho \Pi_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') G_{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (5)$$

여기서  $G_{\Omega}$ 는 계산 영역의 Green 함수이다.

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\overline{u_i \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_j}}(\mathbf{x}') - \overline{u_j \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial x_i}}(\mathbf{x}') \quad (6)$$

$$\Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \Psi_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{x}') f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (7)$$

이때 상관함수  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 는 다음과 같이 모형 된다.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp(-r/L) \quad (8)$$

여기서  $r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$  이고  $L$ 은 상관 길이스케일이다. 식(8)을 사용하고 자유 공간의 Green 함수로 접근할 수 있다고 가정하면 식(5)는 다음과 같이 된다.

$$\rho \Pi_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\exp(-r/L)}{4\pi r} dV(\mathbf{x}') \quad (9)$$

이 식은  $\exp(-r/L)/4\pi r$ 을 포함하게 되며, 식(9)는 연산자  $-\nabla^2 + 1/L^2$  와 관계되어 다음과 같이 변환될 수 있다고 하였다.

$$\Pi_{ij}(\mathbf{x}) - L^2 \nabla^2 \Pi_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{-L^2}{\rho} \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (10)$$

이때 위 식의 우변항은 모형이 필요하다. 균질상태를 가정하면 좌변의 둘째항이 영이 되어  $\Pi_{ij}^h(\mathbf{x}) = (-L^2/\rho) \Psi_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 이 된다. 따라서 그 우변항은 재분배항의 준균질 모형으로 적용이 가능하다. 여기서  $\Pi_{ij}$  대신  $f_{ij} = \Pi_{ij}/k$  로 적용하면 다음과 같은 타원완화방정식이 유도된다.

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{F_{ij}^h}{k} \quad (11)$$

$$F_{ij}^h = \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon \quad (12)$$

길이스케일  $L$ 은 벽면 근방에서 특이점을 피하기 위하여 Kolmogorov 길이스케일을 사용하게 된다. 여기서  $f_{ij} = F_{ij}^h/k$ 이며, 이 식의 좌변 항이 수정 Helmholtz 연산자이다. 우변에 있는  $F_{ij}^h$ 는 균질 상태를 가정하면 좌변의 둘째 항이 영이 되고  $f_{ij} = F_{ij}^h/k$ 으로 되며  $F_{ij}^h$ 는 준균질 모형의 적용이 가능하게 된다. 타원완화모형은 경계조건에 의해서 비균질 유동이 되며, 벽 근방에서 벽 감쇄 함수 역할을 하게 된다.

$$L = C_L \max \left[ \frac{k^{3/2}}{\epsilon}, C_T \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right] \quad (13)$$

여기서  $C_L = 0.2$ ,  $C_T = 80$ 이다. 식(12)에서 재분배 항은 많은 선행 조사에서 타원완화방정식과 가장 잘 일치하는 Speziale, Sarkar & Gatski [1991] 모형이 적용될 것이다.

### 3. 타원완화연산자의 영향

Durbin[1993] 이후 발표된 대부분의 수정된 타원완화방정식은 대수영역에서 재분배항의 증폭과 길이스케일에 대한 두 가지 문제에 대하여 주로 연구되어 왔다. 본 연구에서는 이 문제들이 가지는 문제점의 관계를 조사함으로써 타원완화방정식이 가진 문제를 보다 분명히 볼 수 있을 것이다.

우선 대수영역에서 증폭에 대한 문제를 조사하였다. 식(11)에서 경계조건 영향이 없는 경우, 대수영역에서  $\Phi_{ij}$ 는  $y^{-1}$ 로 거동하고  $L$ 이  $ky$  변환되면,  $f_{ij} = \Gamma f_{ij}^h$ 가 된다. 이때  $\Gamma$ 는 대수영역에서  $\Gamma > 1$ 이면 재분배항의 증폭,  $\Gamma < 1$ 는 재분배항의 감쇄,  $\Gamma = 1$ 이면 증폭이나 감쇄가 없는 중립 모형을 의미한다. Wizman 등[1996]에 의하면 Durbin의 모형은 대수영역에서  $1/(1 - 2(\kappa C_L/C_\mu^{3/4})^2)$ 로 증폭된다고 하였다. 이런 증폭은 길이스케일  $L$ 을 2차 구배항 내에 포함시킴으로 증폭 없는 중립 모형이 가능하다고 하였으며 또 하나의 모형으로 표 1의 WM2를 제안하였다. Manceau 등[2001]은 DNS 자료를 통하여  $\Gamma$ 에 대한 값을 조사한 결과에서 DM1 모형이 1.51로 증폭된다고 하였다. 이런 증폭의 원인이 벽 근방에서 벽에 수직인 방향에 대하여 상관함수 식(8)이 대칭으로 모형을 하였기 때문이라고 하였다. 그들은 벽으로 수렴할수록 상관함수  $f(x)$ 는 비대칭으로 거동하며 이것은 DM 모형으로는 설명할 수 없다고 하였다. 비대칭성을 보장받기 위해서는 식(8)의 분모가  $L$ 대신에  $L + \beta(x' - x)\nabla L$ 로 수정됨으로 타원완화모형의 비대칭 효과를 구현할 수 있다고 하였다. 이때 중립 모형이 되기 위해서는  $\beta = 1/12$ 이 되어야 한다고 하였다 (표1 MM2 모형). Manceau 등은 중립 모형에 대한 언급에서 “중립(neutral)”은 단지 타원연산자에 의한 증폭이 없는 상태를 의미하며, 이런 중립 모형은 단지 경계조건에 의하여 타원완화방정식의 영향이 나타난다고 하였다.

Manceau 등이 조사한 대수영역에서 증폭률은 타원완화방정식이 경계조건의 영향 없이 대수영역에서 이론적 해석의 결과이다. Manceau 등의 주장대로 라면 중립 모형의 경우 대수영역에서의 증폭

률은 경계조건에 의해서만 발생하는 것이다. 그러나 Durbin에 따르면 타원완화방정식은 난류길이스케일에 상당히 민감하며 식(13)에서 그 모형 계수가 DNS 자료의 맞춤을 통하여  $C_L C_\eta \approx 14$  그리고  $C_\eta$  가 80 보다 훨씬 적으면 벽 근방에서 레이놀즈응력이 잘 못 예측된다고 하였다. 이와 같은 길이 스케일은 타원 연산자에 포함되어 있기 때문에 재분배항의 증폭이 타원 연산자에 의한 것인지 경계조건에 의한 것인지 구분하는 것은 어렵다. 따라서 타원완화방정식에 의한 재분배항의 증폭 효과에 대하여 길이스케일의 영향과 경계조건의 영향을 각각 조사하고 이들에 대한 상관관계를 조사함으로써 증폭의 원인을 규명할 수 있을 것이다. 우선 경계조건에 의한 재분배의 증폭에 대하여 조사하고 길이스케일에 대한 것은 3장에서 다룰 것이다.

타원완화방정식의 비균질성은 식(11)의 경계조건으로부터 얻었을 수 있다. 타원완화방정식의 재분배항의 증폭을 조사하기 위하여 사용한 타원완화모형을 표 1에 요약하였다. 이들은 Manceau 등이 조사한 대수 영역에서 증폭률에 따라 중립 모형과 비중립 모형으로 나눌 수 있다. 이 두 종류의 모형이 얼마의 차이를 보이는지를 조사함으로써 타원연산자에 의한 증폭효과를 얻을 수 있을 것이다. 이들에 대한 정량적인 값을 얻기 위하여 DNS 자료를 이용한 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$\alpha_1 f_{ij} - \alpha_2 L \nabla L \cdot \nabla f_{ij} - \alpha_3 L^2 \nabla^2 f_{ij} = \left( \frac{\Pi_{ij}}{k} + \frac{2b_{ij}}{T} \right)_{DNS} \quad (14)$$

여기서 우변에 있는 재분배항은 SSG 모형을 적용하였다. 우변에 있는 원천항에 적용된 모든 난류 성분들은 Kim 등 과 Moser 등의 DNS [1987, 1999] 값으로 대치하였으며  $f_{ij}$  값은 음해적으로 계산하였다. SSG의 준균질 압력변형률 모형을 요약하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} = & \alpha_1 \epsilon b_{ij} + \alpha_2 \epsilon (b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{kl} b_{kl} \delta_{ij}) \\ & + \alpha_3 P_k b_{ij} + \alpha_4 k S_{ij} + \alpha_5 k (b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - 2/3 b_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) + \alpha_6 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad P_k = \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (15a)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (15b)$$

$$\alpha_1 = -3.4, \alpha_2 = 4.2, \alpha_3 = -1.8 \quad (15c)$$

$$\alpha_4 = 0.8 - 1.3 (b_{ij} b_{ji})^{1/2}, \alpha_5 = 1.2, \alpha_6 = 0.4$$

$b_{ij}$ 는 레이놀즈응력 비등방성 텐서이며,  $P_k$ 는 난류운동에너지의 생성률,  $S_{ij}$ 는 평균변형률텐서,  $W_{ij}$ 는 평균와류텐서이다. 적용된 타원완화방정식의 벽 경계조건은 다음과 같다. (자세한 유도 과정은 Durbin [1993]의 논문을 참조)

$$f_{11} = f_{33} = 0, \quad f_{22} = -\frac{20\nu^2}{\epsilon_w y_p^4} (\overline{u_2 u_2})_p, \quad f_{22} = -\frac{20\nu^2}{\epsilon_w y_p^4} (\overline{u_1 u_2})_p \quad (16)$$

Wizman 등과 Manceau 등이 조사한 증폭효과에 대한 영향은 경계조건이 적용되지 않은 상태에서 조사된 것이기 때문에 본 연구에서 경계조건의 적용에 따른 증폭 효과를 조사하기 위하여 다음과 같은 식을 도입하였다.

$$\Gamma_{ij} = \frac{f_{ij}}{\frac{\Pi_{ij}}{k} + \frac{2b_{ij}}{T}} \quad (17)$$

분모는 타원완화방정식(14)의 원천항이며  $f_{ij}$ 는 경계조건에 의하여 구해진 타원완화방정식의 해이다.  $\Gamma_{ij} > 1$ 이면 식(14)의 좌변 둘째 항으로 인하여 발생한 경계조건에 의한 재분배항의 증폭을 의미하며,  $\Gamma < 1$ 는 감쇄,  $\Gamma = 1$  이면 중립 모형이 된다. Durbin 모형에 대하여 식(17)을 적용한 것이 그림 1 이다. 레이놀즈수는 DNS 자료와 동일한  $Re_\tau$ 가 180( $Re=11200$ ), 395( $Re=27400$ ) 그리고 590( $Re=44500$ )에 대한 것이다.  $Re_\tau$ 가 590인 경우, 벽에 수직인 방향의 증폭효과를 나타내는  $\Gamma_{22}$ 는 Manceau 등이 경계조건이 없는 상태에서 조사한 1.51보다 낮은  $y^+ = 160$ 에 최대 1.36까지 증폭되었다. 그리고 벽 근방에서는 급격하게 감쇄되었으며,  $y^+ \sim 80$  부근에서 증폭되기 시작하여  $y^+ = 160$ 까지 증가하다가 이후 선형적으로 감소하였으며 채널의 중앙에 접근하면서 급격하게 증가하였다.  $Re_\tau$ 가 395인 경우  $y^+ = 100$  부근에서 최고로 증폭되었고 이후 완만하게 감소하다 채널의 중앙을 향하여 급격히 상승하는 양상을 보였다. 그리고  $Re_\tau$ 가 180인 경우,  $y^+ = 100$ 까지 다른 두 레이놀즈수와 비슷하게 거동하였으며 이후 급격하게 상승하였다.

이것은 Manceau 등의 중립 모형에 대한 정의로 해석하면  $Re_\tau=590$ 에서 경계조건에 의하여 0.15 이상 대수영역에서 감쇄된 것을 의미한다. 과연 Durbin 모형의 경우 경계조건의 적용이 대수영역에서 증폭효과를 완하시켜주는 역할을 한 것인가? 채널의 중앙에 접근할수록 증폭이 급격하게 증가되는 이유는 무엇인가?

이런 의문을 조사하기 위하여 다른 모형들에 대하여 동일한 조건으로 증폭효과를 조사하였다. 그림 2는 경계조건이 없는 모형에 대하여 증폭률이 1인 중립 모형 3개 (LDM, WM2, MM2)와 증폭률이 1이 아닌 비중립 모형 3개 (DM, WM1, WM1)에 대하여  $\Gamma_{22}$ 를 조사한 것이다. DM을 기준으로 증폭률을 살펴보면, LDM이 대수영역에서 최대 약 1.1까지 증폭되었다. 이것은 결과적으로  $2L\nabla L \cdot \nabla f_{ij}$ 이 대수영역에서 감쇄역할을 한 것으로 볼 수 있다. 이와 유사한 형태로 비중립 모형인 MM1 내에서도  $L\nabla L \cdot \nabla f_{ij}$ 이 포함 되어있는데 이것은 최대 1.2 까지 증폭되어 DM과 LDM의 중간 정도로 증폭되고 있음을 알 수 있다. 이런 결과를 놓고 보면 중립 모형이 증폭효과 상당히 완화되었음을 알 수 있다. 그러나 난류길이스케일이  $C_L = 0.28$ 인 MM2의 경우, 대수영역을 포함하는  $y^+ = 220$ 까지 감쇄되었다. 그리고 채널의 중앙으로 완만한 감소를 보이는 것이 아니라 증폭되었으며, 채널의 중앙으로 갈수록 급격하게 증가하였고 그 정도는  $C_L = 0.20$ 을 사용한 모형보다 크게 예측하였다. 즉, 대수영역에서 재분배의 증폭효과는 길이스케일을 포함한 타원연산자와 경계조건에 영향을 받는 것이 분명하다. 그리고 WM1과 WM2의 조사에서 이들 모형의 증폭률은 대수영역에서 WM1( $C_L = 0.29$ )는 0.75, WM2( $C_L = 0.20$ )는 0.80을 보였으며 WM1의 경우 채널의 중앙으로 갈수록 급격하게 상승하였다. 경계조건이 주어진 경우, 중립 모형의 경우가 비중립 모형보다 대수영역에서 증폭/감쇄가 없는 방향으로 접근하였으며 난류길이스케일이 증폭과 무관하지 않다는 것을 수치적으로 확인 한 것이다. 그림 3에서 Durbin 모형에 대한 길이스케일의 증가에 대한 타원완화방정식의 증폭에 대한 것으로  $C_L$ 이 증가 할수록 벽 근방에서 감쇄되고 대수영역에서 증가하였다.

Table 1 The amplification factor and the model constant of the elliptic relaxation equations

Model	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$C_L/C_\eta$	$\Gamma$	$\Gamma_{22}$
DM (Durbin [1])	1	0	1	0.2/80	1.51	1.36
LDM (Laurence & Durbin [2])	1	2	1	0.2/80	1	1.1
DLM (Durbin & Laurence [3])	$1 - L\nabla^2 L$	2	1	(0.2/60)	1	-
WM1 (Wizman et al. [4])	$1 - 2(\nabla L)^2 - 2L\nabla^2 L$	4	1	0.29/80	1	0.8
WM2 (Wizman et al. [4])	$1 - 2(\nabla L)^2 - 2L^2\nabla L \cdot \nabla(1/L)$	2	1	0.2/80	0.75	0.75
PAM (Pettersson & Andersson [5])	1	0	1	eq(19)	-	-
MM1 (Manceau et al. [6])	1	1	1	0.2/80	1.06	1.25
MM2 (Manceau et al. [6])	$1 + 16\beta L(\nabla L)^2$	$8\beta$	1	0.28/80	1	-
Present [7]	$f_A$	$2f_A$	$f_A$	$0.25/65f_A$	$f_A$	1

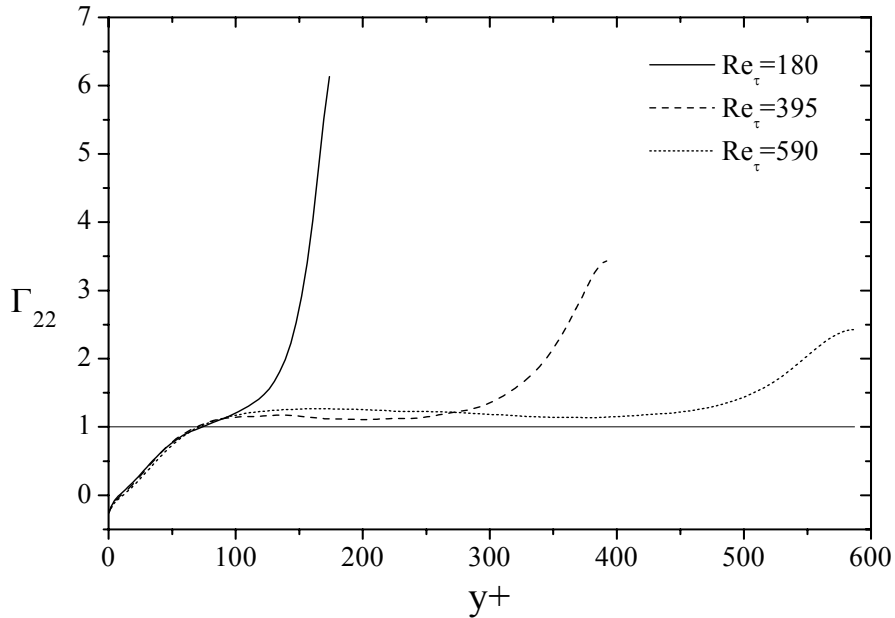


Figure 1 The amplification factor of Durbin' elliptic relaxation equation.

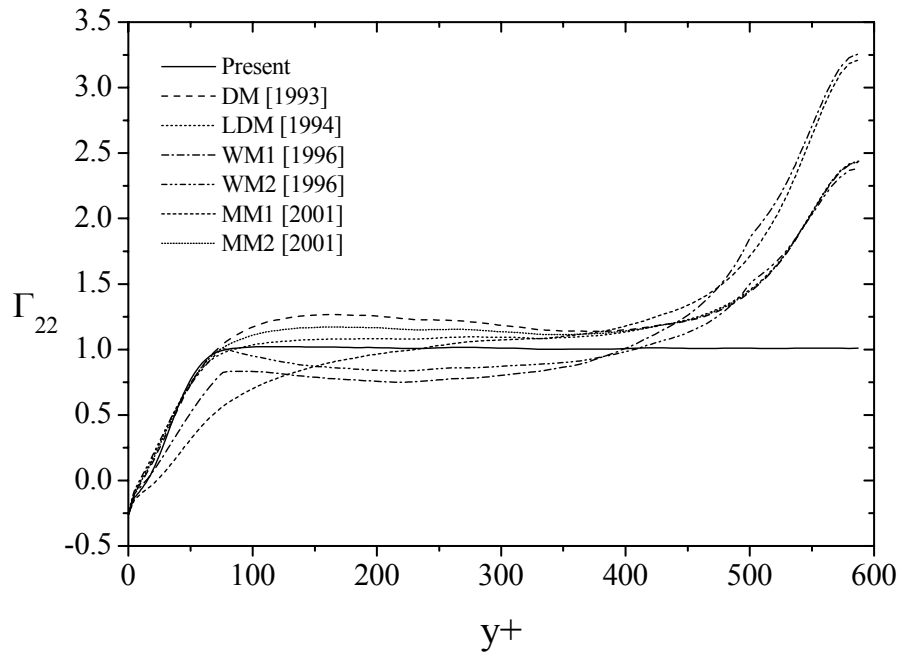


Figure 2 Comparison of amplification factor of elliptic relaxation equation with boundary condition.

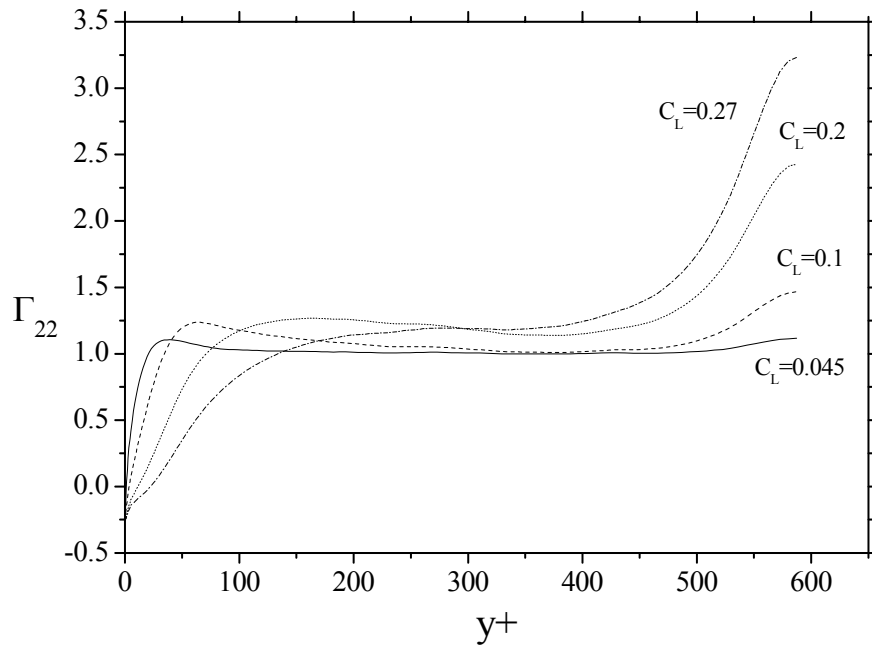


Figure 3 Relationship between increasing model constants of length scale and amplification factor for Durbin's original model.



#### 4. 난류길이스케일의 영향

타원완화모형에서 압력변형률이 수정 Helmholtz 방정식으로의 변환에 사용한 상관함수  $f(x)$ 의 도입은 이 모형의 중요한 전환점이다. 이것은 2점 상관관계를 통하여 임의의 위치에서 주위로의 상관관계 범위를 나타낸다. 이때 Durbin[1993]은  $L$ 을 식(13)으로 정의하였다. 즉, 난류길이스케일  $C_L k^{3/2}/\epsilon$  과 Kolmogorov 길이스케일  $C_L C_\eta (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$  중 큰 값을 사용하도록 모형을 하였다. 이것은 벽 근방에서 난류길이스케일을 그대로 사용하는 경우 Kolmogorov 길이스케일보다 작아 물리적으로 의미 없는 값이 되는 것을 방지하기 위함이다. 그러나 본 조사에서는 Durbin이 언급한 낮은 레이놀즈수  $Re_\tau=180$ 에서 Kolmogorov 길이스케일  $L_K$ 가 난류길이스케일  $L_T$ 보다 채널의 전 영역에서 크게 예측되었다 (그림 4). 이것은 DNS 자료를 이용한 조사에서도 같은 결과를 얻을 수 있다. 이런 계산 과정에 문제가 없다면, Durbin이 제안한 길이스케일은 낮은 레이놀즈수 유동, 재순환 유동, 정체가 있는 유동 등에서 물리적으로 타당성 문제가 발생한다. 또한 이 두 길이스케일 사이에 국부적으로 수치해석적 불안정성이 발생할 수 있을 것이다.

Durbin[1993]에 의하면 채널의 중앙에서 유동방향 레이놀즈응력  $\overline{uu}$ 가 낮게 예측하는 것에 대하여 분명한 원인을 제시하지 못하였다. 그는 이후 연구에서 길이스케일  $L$ 은 난류 에디(eddy)와 관련된 비국부적 효과(nonlocal effect)로 간주하였다. 또한  $L$ 은 준균질 압력변형률모형에 대하여 완화 강도 (the strength of the relaxation)에 직접적으로 영향을 준다고 하였다 (Durbin & Laurence[1996]). 이에 대한 효과를 반영하기 위하여  $f_{ij} = LF_{ij}^h/k$ 을 새로 정의하였다. 이때 길이스케일을 다음과 같이 정의 하였다.

$$L^{DL} = C_L \left( \frac{k^{3/2}}{\epsilon} + C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right) \quad (18)$$

여기서  $C_L = 0.2$ ,  $C_\eta = 60$  이다. 길이스케일에 대한 다른 모형으로, Pettersson & Andersson [1997]은 길이스케일의 계수를 비선형 함수로 다음과 같이 모형을 하였다.

$$\tilde{C}_L = C_L A_2^{1/2}, \quad \tilde{C}_\eta = C_\eta A_2^{-1/2} \exp\left(-\left(\frac{1+A_3}{0.1+A_2}\right)^2\right), \quad \tilde{\epsilon} = \sqrt{\epsilon^2 + (2\nu S_{kl} S_{lk})^2} \quad (19)$$

여기서  $C_L = 0.18$ ,  $C_\eta = 647$ 이며,  $\tilde{\epsilon}$ 는 식(13)의 Kolmogorov 스케일 내에  $\epsilon$ 과 교체된다. 이 모형은 벽 근방에서는 Durbin의 길이스케일과 같이 거동하고 완충영역이후 대수영역에서 벽 근방보다 작은 길이스케일로 거동한다. 그리고 Durbin & Laurence [1996]가 제안한 길이스케일은 Manceau 등이 DNS 자료로부터 제시한 길이스케일보다 전 영역에서 높게 거동하였다.

본 연구에서는 길이스케일에 대하여 Manceau 등이 DNS를 사용한 길이스케일에 대한 거동을 바탕으로 다음과 같이 모형을 하였다.

$$L = C_L \left( \frac{k^{1/2} \overline{v^2}}{\epsilon} + C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right) \quad (20)$$

여기서  $C_L = 0.25$ ,  $C_\eta = 65(1-A)$ 이며,  $A = a_{ij}a_{jk}a_{ki}$ 는 평면변수이다. Kolmogorov 스케일과

난류스케일을 더한 것은 앞서 언급한 낮은 레이놀즈수에서 발생하는 길이스케일이 국부적으로 급변하는 현상을 제거하기 위해서이다. 또한 난류길이스케일에서  $k^{3/2}$  대신  $k^{1/2}\overline{v^2}$ 으로 대체함으로써 벽 근방에서 Kolmogorov 스케일에 의해 지배되도록 하였다. 그리고 Kolmogorov 스케일에  $(1-A)$ 를 곱한 것은 벽에서 멀어지면 난류스케일에 의해 지배되도록 하기 위함이다. 그림 5는 이상의 길이스케일을 Manceau 등이 DNS 자료로부터 정의한 상관 길이스케일과 비교한 것이다. 새롭게 제안한 식 (20) 모형이 다른 모형보다 좋은 결과를 예측하였다.

그림 6과 7은 길이스케일 식(13)과 식(20)을 사용한 상관함수  $f(x)$ 의 변화를 도시한 것이다. 상관함수 분포를 보면 길이스케일이 가장 큰 곳에서 가장 넓은 밴드를 보이는 것을 알 수 있다. 즉,  $Re_\tau = 180$ 의 경우 Durbin 스케일은 채널의 중앙에서 가장 높은 길이스케일을 가지기 때문에 채널의 중앙으로 갈수록 상관함수의 밴드가 넓어졌고 새롭게 제시한 길이스케일은  $y^+ \approx 110$  주위에서 가장 높은 상관함수 밴드를 보였다. 반면  $Re_\tau = 590$ 에서 두 길이스케일에 대하여 상관함수는 비슷한 밴드 형상을 보였다.

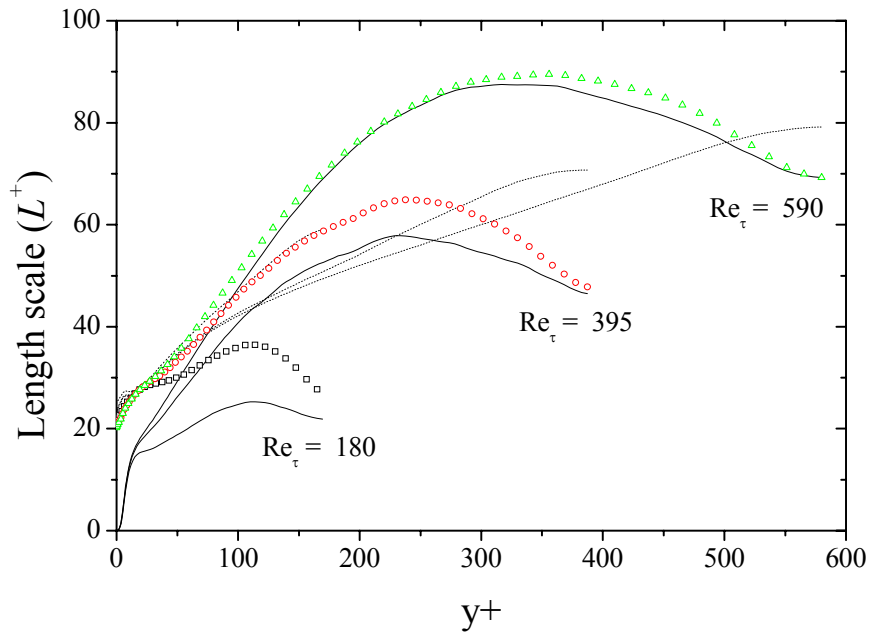


Figure 4 Length scale from the DNS data: symbol, present model;  $\cdots$ , Kolmogorov length scale;  $-$ , turbulent length scale.

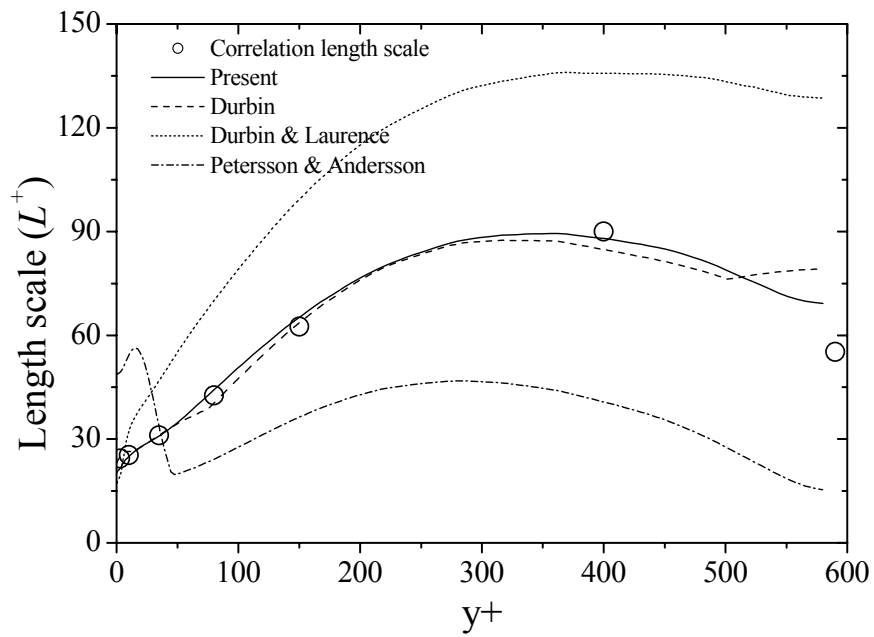


Figure 5 Comparison of length scale from the DNS data.

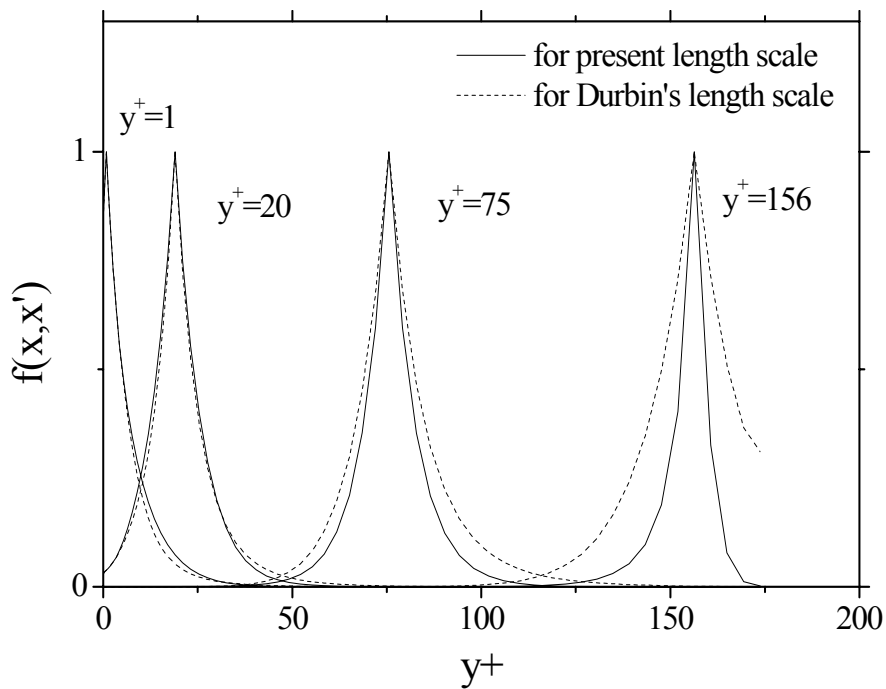


Figure 6 Correlation function  $f(x, x')$  from DNS data  $Re_\tau = 180$ .

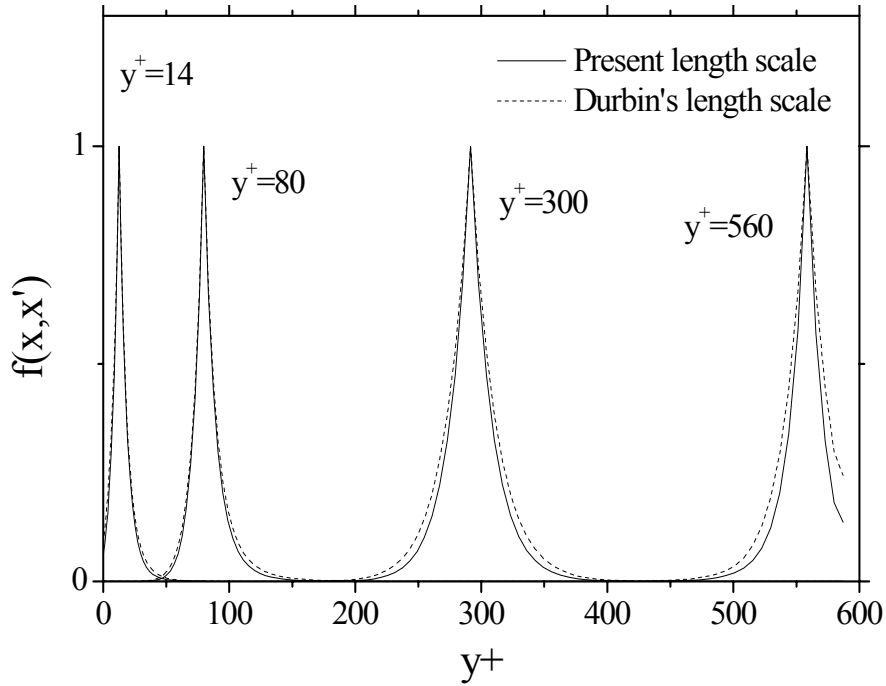


Figure 7 Correlation function  $f(x, x')$  from DNS data  $Re_\tau = 590$ .

## 5. 결 론

타원완화 레이놀즈응력 모형에 대하여 경계조건이 없는 경우와 있는 경우에 대한 증폭의 정도를 조사하였다. 특히, 경계조건이 주어진 상태에서 타원완화 연산자의 증폭이 없는 중립 모형과 증폭이 발생하는 비중립 모형에 대하여 조사하였다. 중립 모형은 경계조건이 적용되지 상태에서는 증폭을 유지하지만 경계조건이 있는 실제 유동에서는 타원완화 연산자가 대수영역에서 증폭될 뿐만 아니라 채널의 중앙에서 급격한 증폭이 발생한다는 것을 확인 할 수 있었다. 중앙에서 급격한 증폭은 경계 조건보다는 오히려 타원연산자의 길이스케일에 더 많은 영향을 받는 것으로 조사되었다.

대수영역에서 증폭의 직접적인 원인은 길이스케일에 사용되는 모형상수  $C_L$ 이 크기 때문이며,  $C_L$ 이 클수록 벽 근방에서 강한 감쇄가 발생하며 채널의 중앙에서 급격한 증가가 발생하였다. 그리고 길이스케일에 대한 조사를 통하여, 낮은 레이놀즈수 유동에서 Durbin이 제안한 길이스케일은 Kolmogorov 스케일에 전적으로 영향을 받는 것으로 조사되었다. 이에 대한 새로운 접근으로 수정된 난류스케일에 수정된 Kolmogorov 스케일을 더하여 모형 하였다. 새로 제시한 길이스케일은 Manceau 등의 상관길이스케일에 대한 DNS 결과와 상당히 일치하였으며 레이놀즈수에 관계없이 사용할 수 있는 모형으로 거동하였다.

## 참고문헌

- 1 Durbin P. A., "A Reynolds stress model for near-wall turbulence," J. Fluid Mechanics, Vol.249(1993), pp. 465-498.
- 2 Laurence D. and Durbin P. A., "Modeling near wall effects in second moment closures by elliptic relaxation', Proc. Summer program, CTR, Stanford University/NASA Ames Research Center, 1994.
- 3 Durbin P. A. and Laurence D., "Nonlocal effects in single point closure. Proc. Third Turbulence Research Association Conf. Seoul, Korea, 1996 .
- 4 Wizman, V., Laurence, D., Kanniche, M., Durbin, P. & Demuren, A. "Modeling near-wall effects in second-moment closures by elliptic relaxation," Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol.17(1996), pp.255-266.
- 5 Pettersson B. A. and Andersson H. I., "Near-wall Reynolds-stress modelling in noninertial frames of reference, Fluid Dynamics Research", Vol. 19(1997), pp. 251-276.
- 6 Manceau, R., Wang. M. and Laurence D., "Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier Stokes modeling," J. Fluid Mech., Vol. 437(2001), pp. 307-338.
- 7 Chun, K. H., Choi, Y. D. and Shin, J. K., "Modelling strongly inhomogeneity effects on pressure strain in second moment closure by elliptic relaxation", Third International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Sendai, Japan, 2003.
- 8 Kim, J., Moin, P. and Moser, R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number," J. Fluid Mech., Vol.177(1987), pp. 133-166.
- 9 Moser, R. D., Kim, J. and Mansour, N. N., " Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ ," Phys. Fluids, Vol.11(1999), pp. 943-948.
- 10 Launder, B.E and Spalding, D.B., "The Numerial Computation of Turbulent Flows," Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol.3(1974), pp.269-289.